ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO MAYOR QUE 2

Vamos a ver dos métodos: por factorización y por cambio de variable (bicuadradas)

1) RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POLINÓMICAS POR FACTORIZACIÓN

Recuerda que $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ ò \\ B = 0 \end{cases}$. Es decir, el resultado de un producto es cero si y sólo si alguno de los factores que se multiplican es cero. Por ello, para resolver ecuaciones del tipo:

$$\underline{(P_1)\cdot(P_2)\cdot(P_3)\cdot,...,\cdot(P_n) = 0 \quad \text{donde} \quad P_{1,}\ P_2, \ldots P_n \quad \text{son polinomios}}$$

igualamos a cero cada uno de los factores y resolvemos las correspondientes ecuaciones.

$$(P_1)\cdot(P_2)\cdot(P_3)\cdot,....,\cdot(P_n) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \\ ..... \\ P_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{resolvemos cada una de las ecuaciones de forma independiente}$$

EJEMPLOS

a) Resuelve la ecuación $(x+5)(x+3)(x^2-4) = 0$

$$(x+5)(x+3)(x^2-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+5=0 \Rightarrow x=-5 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4} \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

Soluciones: $x=-5 \quad x=-3 \quad x=2 \quad y \quad x=-2$

b) Resuelve la ecuación $2x(x^3+8)(x^2+4x+5) = 0$

$$2x(x^3+8)(x^2+4x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ ò \\ x^3+8=0 \Rightarrow x^3=-8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-8} \Rightarrow x=-2 \\ ò \\ x^2+4x+5=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} \Rightarrow \text{no tiene solución real} \end{cases}$$

Soluciones: $x=0 \quad y \quad x=-2$

c) Resuelve la ecuación $3x^3+8x^2+3x-2=0$

En este caso como el polinomio no está factorizado tendremos que factorizarlo nosotros.

Posibles raíces = {divisores de – 2 }= $\{\pm 1, \pm 2\}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & +8 & +3 & -2 \\ -1 & & -3 & -5 & +2 \\ \hline & 3 & +5 & -2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow 3x^3+8x^2+3x-2=(x+1)(3x^2+5x-2)$$

Por tanto,

$$3x^3+8x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(3x^2+5x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow \underline{x=-1} \\ \text{ò} \\ 3x^2+5x-2=0 \ \ (*) \end{cases}$$

$$(*)\ \ 3x^2+5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6}=\begin{cases} x=\frac{2}{6} \Rightarrow \underline{x=\frac{1}{3}} \\ \underline{x=-2} \end{cases}$$

Soluciones: $x=-1$ $\quad x=-2$ $\quad$ y $\quad x=\frac{1}{3}$

d) Resuelve la ecuación $2a^4-20a^3+50a^2=0$

En este caso para factorizar el polinomio vamos a utilizar la extracción de factor común y las identidades notables.

$$2a^4-20a^3+50a^2=0 \Leftrightarrow 2a^2(a^2-10a+25)=0 \Leftrightarrow 2a^2(a-5)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=0 \Rightarrow a^2=0 \Rightarrow a=0 \ \ \text{(doble)} \\ \text{ò} \\ (a-5)^2=0 \Rightarrow a-5=0 \Rightarrow a=5\ \text{(doble)} \end{cases}$$

Soluciones: $a=0$ $\quad y \quad$ $a=5$

e) Resuelve la ecuación $2x^5+9x^4+9x^3-x^2-3x=0$

1) Extraemos factor común "x".

$$2x^5+9x^4+9x^3-x^2-3x=0 \Leftrightarrow x\cdot(2x^4+9x^3+9x^2-x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x=0} \\ \grave{o} \\ 2x^4+9x^3+9x^2-x-3=0 \ \ (*) \end{cases}$$

2) Resolvemos la ecuación $2x^4+9x^3+9x^2-x-3=0 \ \ (*)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & +9 & +9 & -1 & -3 \\ -1 & & -2 & -7 & -2 & +3 \\ \hline & 2 & +7 & +2 & -3 & \boxed{0} \\ -3 & & -6 & -3 & +3 & \\ \hline & 2 & +1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^4+9x^3+9x^2-x-3=(x+1)(2x^3+7x^2+2x-3)$$

$$\Rightarrow 2x^4+9x^3+9x^2-x-3=(x+1)(x+3)(2x^2+x-1)$$

Por tanto,

$$2x^4+9x^3+9x^3-x-3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)(2x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow \underline{x=-1} \\ \grave{o} \\ x+3=0 \Rightarrow \underline{x=-3} \\ \grave{o} \\ 2x^2+x-1=0 \ \ (**) \end{cases}$$

Finalmente resolvemos la ecuación (**)

$$2x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases} x=\dfrac{2}{4} \Rightarrow \underline{x=\dfrac{1}{2}} \\ \underline{x=-1} \end{cases}$$

3) Por tanto,

<u>Soluciones:</u> $x=0$ $\quad x=-1$ (doble) $\quad x=-3$ y $\quad x=\dfrac{1}{2}$

2) ECUACIONES BICUADRADAS $\rightarrow ax^4 + bx^2 + c = 0$

1) Hacemos el cambio de variable $\underline{x^2 = t}$ y la ecuación se convierte en la ecuación de 2º grado:

$$at^2 + bt + c = 0$$

2) Resolvemos la ecuación de segundo grado: $at^2 + bt + c = 0 \begin{cases} t = \alpha_1 \\ t = \alpha_2 \end{cases}$

3) Deshacemos el cambio de variable: $\begin{cases} t = \alpha_1 \Rightarrow x^2 = \alpha_1 \Rightarrow x = \sqrt{\alpha_1} \\ t = \alpha_2 \Rightarrow x^2 = \alpha_2 \Rightarrow x = \sqrt{\alpha_2} \end{cases}$

EJEMPLOS

a) Resuelve la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

1) Hacemos el cambio de variable $\underline{x^2 = t}$ y la ecuación se convierte en la ecuación de 2º grado:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

2) Resolvemos la ecuación de segundo grado: $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} t = 4 \\ t = 1 \end{cases}$

3) Deshacemos el cambio de variable

- $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$
- $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$

Soluciones: $x = -2$ $\quad x = 2$ $\quad x = -1$ y $\quad x = 1$

b) Resuelve la ecuación $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

1) Hacemos el cambio de variable $\underline{x^2 = t}$ y la ecuación se convierte en la ecuación de 2º grado:

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

2) Resolvemos la ecuación de segundo grado: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}$

3) Deshacemos el cambio de variable

- $t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$
- $t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} \Rightarrow \text{no existe solución real}$

Soluciones: $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$

3) ECUACIONES DEL TIPO $\rightarrow ax^{2n}+bx^n+c=0$

Este caso es una generalización del anterior.

1) Hacemos el cambio de variable $\underline{x^n=t}$ y la ecuación se convierte en la ecuación de 2º grado:

$$at^2+bt+c=0$$

2) Resolvemos la ecuación de segundo grado: $at^2+bt+c=0\begin{cases}t=\alpha_1\\t=\alpha_2\end{cases}$

3) Deshacemos el cambio de variable: $\begin{cases}t=\alpha_1\Rightarrow x^n=\alpha_1\Rightarrow x=\sqrt[n]{\alpha_1}\\t=\alpha_2\Rightarrow x^n=\alpha_2\Rightarrow x=\sqrt[n]{\alpha_2}\end{cases}$

EJEMPLOS

a) Resuelve la ecuación $x^6-19x^2-216=0$.

1) Hacemos el cambio de variable $\underline{x^3=t}$ y la ecuación se convierte en la ecuación de 2º grado:

$$t^2-19t-216=0$$

2) Resolvemos la ecuación de segundo grado: $t^2-19t-216=0\Leftrightarrow t=\dfrac{19\pm\sqrt{361+864}}{2}=\dfrac{19\pm35}{2}=\begin{cases}t=27\\t=-8\end{cases}$

3) Deshacemos el cambio de variable

- $t=27\Rightarrow x^3=27\Rightarrow x=\sqrt[3]{27}\Rightarrow x=3$
- $t=-8\Rightarrow x^3=-8\Rightarrow x=\sqrt[3]{-8}\Rightarrow x=-2$

Soluciones: $x=3$ y $x=-2$

b) Resuelve la ecuación $x^8+2x^4-3=0$.

1) Hacemos el cambio de variable $\underline{x^4=t}$ y la ecuación se convierte en la ecuación de 2º grado:

$$t^2+2t-3=0$$

2) Resolvemos la ecuación de segundo grado: $t^2+2t-3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{-2\pm4}{2}=\begin{cases}t=1\\t=-3\end{cases}$

3) Deshacemos el cambio de variable

- $t=1\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\sqrt[4]{1}\Rightarrow x=\pm1$
- $t=-3\Rightarrow x^4=-3\Rightarrow x=\sqrt[4]{-3}\Rightarrow$ no existe solución real

Soluciones: $x=-1$ y $x=1$