14 Integral definida

ACTIVIDADES INICIALES

14.I. Con ayuda de la calculadora, obtén la suma de los cien primeros términos de esta progresión:

$$\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25, 25\sqrt{5},...$$

Se trata de una progresión geométrica de razón $r = \sqrt{5}$, por lo que:

$$S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{5^{50} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \approx 1{,}61 \cdot 10^{35}$$

14.II. Expresa la función $f(x) = |x-2| + |x+3|$ como una función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)-(x+3) & \text{si} \quad x < -3 \\ -(x-2)+(x+3) & \text{si} \quad -3 \le x \le 2 \\ (x-2)+(x+3) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}, \text{ es decir, } f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si} \quad x < -3 \\ 5 & \text{si} \quad -3 \le x \le 2 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}.$$

14.III. Desarrolla estas sumas:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} (5-i)^2$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} (1+i)(x_i - x_{i-1})$

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} (5-i)^2 = (5-1)^2 + (5-2)^2 + (5-3)^2 + (5-4)^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} (1+i)(x_i - x_{i-1}) = (1+1)(x_1 - x_0) + (1+2)(x_2 - x_1) + (1+3)(x_3 - x_2) + (1+4)(x_4 - x_3) +$

$+(1+5)(x_5 - x_4) + (1+6)(x_6 - x_5) = -2x_0 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 7x_6$.

14.IV. Encuentra los puntos de intersección entre las parábolas: $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.

$x^2 - 2x = 6x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$. Los puntos de corte son $A(0, 0)$ y $B(4, 8)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

14.1. Obtén con el método visto el área del trapecio limitado por la recta $y = 2x + 1$, el eje horizontal y las verticales $x = 0$ y $x = 4$. Comprueba el resultado calculando el área geométricamente.

Se divide el intervalo [0, 4] en $4n$ subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$.

Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[2\frac{1}{n} + 1 + 2\frac{2}{n} + 1 + 2\frac{3}{n} + ... + 2\frac{4n-1}{n} + 1 + 2\frac{4n}{n} + 1\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{2+4+6+\cdots+2(4n-1)+8n}{n} + 4n\right] =$$

$$\frac{1}{n}\left[\frac{\frac{2+8n}{2}\cdot 4n}{n} + 4n\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{(1+4n)4n}{n} + 4n\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{4n+16n^2+4n^2}{n}\right] = \frac{4n+20n^2}{n^2} = \frac{4+20n}{n} = \frac{4}{n} + 20.$$

Se toma como área del recinto el número $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, es decir, $A = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n} + 20\right) = 20$ u^2.

Geométricamente, el trapecio tiene altura 4 y bases 1 y 9. Su área es:

$A = \frac{9+1}{2} \cdot 4 = 20$ u^2, que coincide con la obtenida con el método anterior.

14.2. Obtén una fórmula para $1^3 + 2^3 + ... + n^3$. Para ello procede de forma análoga a la del primer ejemplo, desarrollando las cuartas potencias de (n + 1).

$1^4 = 1$

$2^4 = (1+1)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1$

$3^4 = (2+1)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1$

$\vdots$

$(n+1)^4 = n^4 + 4\cdot n^3 + 6\cdot n^2 + 4\cdot n + 1$

Sumando los primeros miembros y los segundos miembros, se obtiene:

$1^4 + 2^4 + \cdots + (n+1)^4 =$

$(1^4 + 2^4 + \cdots + n^4) + 4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1$

Luego $(n+1)^4 = 4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1$

Se despeja la suma de los n primeros cubos y se aplican las fórmulas ya conocidas:

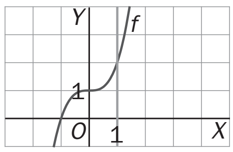
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{(n+1)^4 - 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - 4(1 + 2 + \cdots + n) - (n+1)}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2(n+1)n - (n+1)}{4} = \frac{(n+1)\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right]}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1)}{4} = \frac{(n+1)(n^3 + n^2)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Así pues, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

14.3. Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 + 1$, el eje horizontal y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Toma en cada subintervalo como c_i el extremo izquierdo.



Se divide el intervalo [0, 1] en n subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$. Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + 1 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + 1 + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^3 + 1\right] = \frac{1}{n}\left[n + \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3}\right]$$

Aplicando la fórmula encontrada en el ejercicio anterior:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[n + \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3}\right] = \frac{1}{n}\left[n + \frac{n^2(n+1)^2}{4n^3}\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{4n^2 + n^2 + 2n + 1}{4n}\right] = \frac{5n^2 + 2n + 1}{4n^2} = \frac{5}{4} + \frac{2n+1}{4n^2}$$

El área del recinto es el número $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, es decir, $A = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4} + \frac{2n+1}{4n^2}\right) = \frac{5}{4}$ u^2.

14.4. Sea f continua en [– 1, 4] y $g(x) = f(x) + 2$. Si $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 5$, calcula $\int_{-1}^{4} g(t)\,dt$.

$$\int_{-1}^{4} g(t)\,dt = \int_{-1}^{4} (f(t) + 2)\,dt = \int_{-1}^{4} f(t)\,dt + \int_{-1}^{4} 2\,dt = 5 + 2(4 - (-1)) = 5 + 2\cdot 5 = 15$$

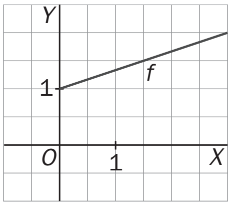
14.5. Si $\int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}$, $\int_1^2 f(x)dx = \frac{8}{3}$ y $\int_0^3 f(x)dx = \frac{11}{3}$, halla:

a) $\int_0^2 f(x)dx$ b) $\int_1^3 f(x)dx$ c) $\int_2^3 f(x)dx$

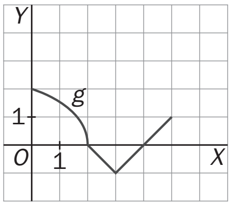
a) $\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$ b) $\int_1^3 f = \int_0^3 f - \int_0^1 f = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ c) $\int_2^3 f = \int_1^3 f - \int_1^2 f = \frac{7}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$

14.6. Halla el valor medio de estas funciones:

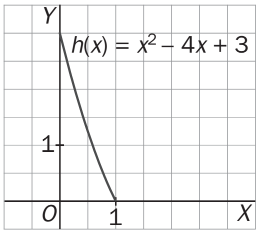
a)



b)



c)



a) Se debe encontrar el valor $f(c)$, siendo c el número del ntervalo [0,3], que cumpla $\int_0^3 \left(\frac{x}{3}+1\right)dx = f(c)\cdot(3-0)$. Como $\int_0^3 \left(\frac{x}{3}+1\right)dx$ es el área de un trapecio de altura 3 y bases 2 y 1, su valor es $\int_0^3 \left(\frac{x}{3}+1\right)dx = \frac{2+1}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2}$. Entonces, $f(c)\cdot(3-0) = \frac{9}{2} \Rightarrow f(c) = \frac{3}{2}$, es el valor medio de la función en dicho intervalo.

b) Se debe encontrar el valor $g(c)$, siendo c el número del intervalo [0, 5] que cumpla $\int_0^5 g(x)\,dx = g(c)\cdot(5-0)$.

Se calcula esta integral hallando el área de las tres regiones (un cuarto de círculo que está por encima del eje X; un triángulo que está por debajo del eje X; un triángulo que está por encima del eje X).

El área del cuarto de círculo es $\frac{\pi\cdot 2^2}{4} = \pi$.

El área del triángulo que está por debajo del eje X es $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$. Esto indica que $\int_2^4 f(x)\,dx = -1$, ya que al estar por debajo del eje X, la integral es el opuesto del área.

El área del triángulo que está por encima del eje X es $\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Con todo esto: $\int_0^5 g(x)\,dx = \int_0^2 g(x)\,dx + \int_2^4 g(x)\,dx + \int_4^5 g(x)\,dx = \pi - 1 + \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2}$

Por tanto, $g(c)\cdot(5-0) = \pi - \frac{1}{2} \Rightarrow g(c) = \frac{2\pi - 1}{10}$ es el valor medio de la función en dicho intervalo.

c) Se debe encontrar el valor $h(c)$, siendo c el número del intervalo [0,1] tal que $\int_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx = h(c)\cdot(1-0)$ .Como $\int_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$,entonces

$h(c)\cdot(1-0) = \frac{4}{3} \Rightarrow h(c) = \frac{4}{3}$ es el valor medio de la función en dicho intervalo.

14.7. Calcula:

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\mathrm{tg}^2\, t}{\mathrm{tg}\, t}\,dt$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,(x^2-1)\,dx$

a) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\mathrm{tg}^2\, t}{\mathrm{tg}\, t}\,dt = \left[\ln(\mathrm{tg}\, t)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \ln\sqrt{3} - \ln 1 = \frac{\ln 3}{2}$$

b) $$\int_{-1}^{1} x\,(x^2-1)\,dx = \left[\frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 0 = 0$$

14.8. Halla

a) $\displaystyle\int_0^{-4} \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$ **b)** $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

a) $\displaystyle\int_0^{-4} \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx = -\int_{-4}^{0} \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx = -\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+4x+5)\right]_{-4}^{0} = -\frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 5) = 0$

b) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \int_1^2 \ln u du = [u \ln u]_1^2 - \int_1^2 u\frac{1}{u}du = 2\ln 2 - \ln 1 - (2-1) = 2\ln 2 - 1$

14.9. Calcula las derivadas de las funciones:

a) $\displaystyle f(x) = \int_0^x \text{tg}\, t\, dt$ **b)** $\displaystyle g(x) = \int_x^e ae^a da$ **.**

a) Si $\displaystyle f(x) = \int_0^x \text{tg}\, t\, dt$, por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x) = \text{tg}\, x$.

b) Como $\displaystyle g(x) = \int_x^e ae^a da = -\int_e^x ae^a da$ entonces $g'(x) = -xe^x$.

14.10. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\displaystyle f(x) = \int_{-x^2}^{x^3} \text{sen}\, 2t\, dt$ **b)** $\displaystyle g(x) = \int_{3x-2}^{x^2+x} e^{-t^2} dt$ **.**

a) $\displaystyle f(x) = \left[\frac{-\cos 2t}{2}\right]_{-x^2}^{x^3} = \frac{1}{2}(-\cos(2x^3) + \cos(-2x^2))$, su derivada es: $f'(x) = 3x^2 \,\text{sen}\,(2x^3) + 2x\,\text{sen}\,(-2x^2))$

b) La función $h(t) = e^{-t^2}$ es continua $\Rightarrow g(x) = [H(t)]_{3x-2}^{x^2+x} = H(x^2+x) - H(3x-2)$, con $H'(x) = e^{-x^2}$, por tanto:
$g'(x) = (2x+1)H'(x^2+x) - 3H'(3x-2) = (2x+1)e^{-(x^2+x)^2} - 3e^{-(3x-2)^2}$

14.11. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $y = \dfrac{x}{1+x^2}$**, el eje *X* y las rectas *x* = 1 y *x* = 2.**

La función es positiva en [1, 2] $\displaystyle\Rightarrow A = \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)\ \text{u}^2$

14.12. Calcula el área de la región finita limitada por el eje horizontal y la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$ **.**

La función es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje *X* en los puntos de abscisas –1 y 3.

La región queda por debajo del eje *X* $\displaystyle\Rightarrow A = -\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = -\left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{32}{2}\ \text{u}^2.$

14.13. Calcula el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = x - x^2$ **y** $g(x) = x^2 - \dfrac{3}{2}$**.**

Primero hay que calcular los puntos de corte de ambas funciones:

$x^2 - \dfrac{3}{2} = x - x^2 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1{,}15;\ x = -0{,}65$

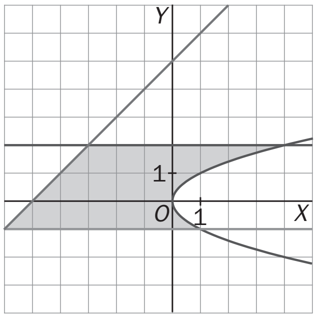
La región está limitada entre dos curvas: $f(x) = x - x^2$ está por arriba y $g(x) = x^2 - \dfrac{3}{2}$ está por debajo; así pues, el área pedida es:

$$A = \int_{-0{,}65}^{1{,}15}(f(x) - g(x))dx = \int_{-0{,}65}^{1{,}15}\left(-2x^2 + x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right]_{-0{,}65}^{1{,}15} = 1{,}95\ \text{u}^2$$

14.14. Calcula el área de la región limitada por estas cuatro curvas: $y = x + 5$, $y = 2$, $y = -1$, $y^2 = x$.

La gráfica de la curva $y^2 = x$, que no es una función, se puede obtener dibujando estas dos gráficas:

$y = \pm\sqrt{x}$



Por tanto, la región es la que se muestra. Los vértices de la región son los puntos de intersección de las curvas que se cortan:

$A(-6, -1)$, $B(-3, 2)$, $C(4, 2)$ y $D(1, -1)$.

La región que está a la izquierda del eje Y es un trapecio de altura 3 y bases 6 y 3. Su área es $A_1 = \frac{6+3}{2} \cdot 3 = \frac{27}{2}$ u^2.

Otra región está limitada superiormente por $y = 2$ e inferiormente por $y = \sqrt{x}$, su área la da la integral:

$$A_2 = \int_0^4 (2 - \sqrt{x})\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_0^4 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{u}^2$$

La otra región está limitada superiormente por $y = -\sqrt{x}$ e inferiormente por $y = -1$, su área:

$$A_3 = \int_0^1 (-\sqrt{x} - (-1))\,dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})\,dx = \left[x - \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ u}^2 \Rightarrow A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{27}{2} + \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{33}{2} \text{ u}^2$$

14.15. Calcula el volumen de un sólido cuya base es un círculo de radio 1 y en el que las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulos equiláteros.

Si se centra el círculo en el origen, su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$, es decir, $y^2 = 1 - x^2$.

A continuación hay que encontrar la función $A(x)$ que da el área de cada uno de los triángulos de la sección. La base de cada triángulo equilátero de cada sección es $2y$. La altura de cada uno de estos triángulos es $a = \sqrt{(2y)^2 - y^2} = \sqrt{3}y$. Por tanto, el área de estos triángulos es $\frac{2y \cdot \sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3}y^2$. Así pues, la función $A(x)$ es: $A(x) = \sqrt{3}(1 - x^2) \Rightarrow V = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1 - x^2)\,dx = \sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ u^3.

14.16. Halla el volumen del sólido que se forma al girar la región bajo la gráfica de $y = 1 + \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

$$V = \int_0^{2\pi} \pi(1 + \cos x)^2\,dx = \pi\int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^2\,dx \Rightarrow \int (1 + \cos x)^2\,dx = \int 1 + 2\cos x + \cos x^2\,dx =$$

$= x + 2\,\text{sen}\,x + \int \cos x^2\,dx$ y, por partes: $f(x) = \cos x$, $dg(x) = \cos x\,dx$, $df(x) = -\text{sen}\,x\,dx$, $g(x) = \text{sen}\,x$

$$\int \cos^2 x\,dx = \text{sen}\,x\cos x + \int \text{sen}^2 x\,dx = \text{sen}\,x\cos x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx = \text{sen}\,x\cos x + x - \int \cos^2 x\,dx$$

Despejando se obtiene: $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \text{sen}\,x\cos x}{2} + C$

Por tanto, $V = \pi\int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^2\,dx = \pi\left[x + 2\,\text{sen}\,x + \frac{x + \text{sen}\,x\cos x}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi^2$ u^3

14.17. Halla el volumen de un sólido S cuya base es la región $\{(x, y)$ tal que $x^2 \le y \le 1\}$ y cuyas secciones transversales perpendiculares a la base son cuadrados.

Cada uno de los cuadrados de las secciones tienen lado $1 - x^2$; por tanto, $A(x) = (1 - x^2)^2$.

El volumen del sólido es: $V = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\,dx = \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx = \left[x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}$ u^3

14.18. Halla la longitud de la catenaria $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow L_0^1 = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{e^{2x} + e^{-2x} + 2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^x + e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \text{ u.}$$

14.19. La densidad de coches $\rho(x)$ (en coches por km) en los primeros 20 km de una autovía de salida de una gran ciudad viene dada por la función $\rho(x) = 300\left(2 + \text{sen}\, 4\sqrt{x + 0{,}15}\right)$ siendo x la distancia en km al comienzo de la autovía.

a) Escribe una suma de Riemann para hallar el número de coches en esos 20 km con cinco intervalos de igual longitud tomando como punto muestra el extremo izquierdo.

b) Calcula el número total de coches en esos 20 km y compara el resultado obtenido con el del apartado a.

a) Se divide [0, 20] en 5 subintervalos de longitud 4 km mediante los puntos 0, 4, 8, 12, 16, 20.

En cada subintervalo se elige como punto muestra el extremo izquierdo del subintervalo.

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\cdot \Delta x \Rightarrow S = \sum_{i=1}^{5} \rho(x_{i-1})\cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{5} \rho(x_{i-1})\cdot 4 = 4\cdot\left[\rho(0) + \rho(4) + \rho(8) + \rho(12) + \rho(16)\right] \approx 14\,004$$

b) $\displaystyle\int_0^{20} \rho(x)\,dx = \int_0^{20} 300\left(2 + \text{sen}\,4\sqrt{x + 0{,}15}\right)dx = 600\int_0^{20} dx + 300\int_0^{20} \text{sen}\,4\sqrt{x + 0{,}15}\,dx$

Se cambia de variable: $\sqrt{x + 0{,}15} = t$, $\dfrac{dx}{2\sqrt{x + 0{,}15}} = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x + 0{,}15}dx = 2t\,dt$

$\displaystyle\int \text{sen}\,4\sqrt{x + 0{,}15}\,dx = \int 2t\,\text{sen}(4t)\,dt = 2\int t\,\text{sen}(4t)\,dt$; $f(t) = t$, $g'(t) = \text{sen}\,(4t)$, $f'(t) = 1$, $g(t) = \dfrac{-\cos(4t)}{4}$

$$2\int t\cdot \text{sen}(4t)\,dt = 2\cdot\left(\frac{-t\cos(4t)}{4} + \frac{1}{4}\int \cos(4t)\,dt\right) = \frac{-t\cos(4t)}{2} + \frac{\text{sen}(4t)}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \text{sen}\,4\sqrt{x + 0{,}15}\,dx = \frac{-\sqrt{x + 0{,}15}\cos(4\sqrt{x + 0{,}15})}{2} + \frac{\text{sen}(4\sqrt{x + 0{,}15})}{8} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^{20} 300\left(2 + \text{sen}\,4\sqrt{x + 0{,}15}\right)dx = 600\cdot 20 + 300\left[\frac{-\sqrt{x + 0{,}15}\cos(4\sqrt{x + 0{,}15})}{2} + \frac{\text{sen}(4\sqrt{x + 0{,}15})}{8}\right]_0^{20} \approx 12\,372$$

14.20. Circulandia, una típica ciudad, está muy poblada cerca del centro pero su población decrece cuando nos alejamos de él. En efecto, su densidad de población es $10\,000(3 - r)$ habitantes/km^2 siendo r la distancia al centro en km.

a) Si la densidad de población en los confines de la ciudad es 0, ¿cuál es el radio de la zona en la que viven?

b) ¿Cuál es la población de la ciudad?

a) Como la densidad en los confines de la ciudad es 0 $\Rightarrow 10\,000(3 - r) = 0$, es decir, $r = 3$ km.

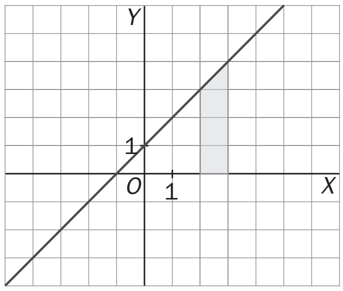
b) $P \approx \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i \Delta r\cdot f(c_i) = \int_0^3 2\pi r\cdot 10\,000(3 - r)\,dr$. Se calcula esta integral:

$$\int_0^3 2\pi r\cdot 10\,000(3 - r)\,dr = 20\,000\pi\int_0^3 (3r - r^2)\,dr = 20\,000\pi\left[\frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^3 = 90\,000\pi \approx 282\,743 \text{ habitantes}$$

EJERCICIOS

Área bajo una curva

14.21. Halla el área de la región sombreada utilizando los diferentes métodos propuestos y comprueba que siempre obtienes el mismo resultado:



a) Dividiendo el intervalo [2, 3] en *n* subintervalos de longitud $\frac{1}{n}$, tomando como altura de cada rectángulo la ordenada de su extremo derecho y calculando, finalmente, el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuando $n \to \infty$.

b) Procediendo como en a pero tomando como altura de cada rectángulo la ordenada de su extremo izquierdo.

c) Hallando una primitiva *F* de la función cuya gráfica es la recta oblicua que limita la región y calculando *F*(3) – *F*(2).

d) Utilizando la fórmula geométrica que da el área de un trapecio.

a) La ecuación de la recta que limita superiormente el trapecio es $y = x + 1$.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[2+\frac{1}{n}+1+2+\frac{2}{n}+1+...+2+\frac{n}{n}+1\right] = \frac{1}{n}\left[3n+\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\left[3n^2+\frac{1+n}{2}\cdot n\right] = \frac{1}{n^2}\left[\frac{6n^2+n+n^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{7n^2+n}{2}\right] = \frac{7n+1}{2n} = \frac{7}{2}+\frac{1}{n}$$. El área del recinto es: $A = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{7}{2}$ u².

b) $$S_n = \frac{1}{n}\left[2+1+2+\frac{1}{n}+1+...+2+\frac{n-1}{n}+1\right] = \frac{1}{n}\left[3n+\frac{1+2+\cdots+n-1}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\left[3n^2+\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{6n^2+n^2-n}{2}\right] = \frac{1}{n^2}\left[\frac{7n^2-n}{2}\right] = \frac{7n-1}{2n} = \frac{7}{2}-\frac{1}{2n} \Rightarrow A = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}\right) = \frac{7}{2}\ \text{u}^2$$

c) Una primitiva de $y = x + 1$ es $F(x) = \frac{x^2}{2}+x \Rightarrow A = F(3)-F(2) = \frac{3^2}{2}+3-\left(\frac{2^2}{2}+2\right) = \frac{9}{2}-1 = \frac{7}{2}$ u²

d) La región sombreada es un trapecio de altura 1 y bases 4 y 3. Su área es $A = \frac{4+3}{2}\cdot 1 = \frac{7}{2}$ u².

14.22. Calcula el área limitada por la curva $y = x^2 + 1$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 2$.

Se divide el intervalo [– 2, 2] en 4*n* subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$.

Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(-2+\frac{1}{n}\right)^2+1+\left(-2+\frac{2}{n}\right)^2+1+...+\left(-2+\frac{4n}{n}\right)^2+1\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[4+\left(\frac{1}{n}\right)^2-\frac{4}{n}+1+4+\left(\frac{2}{n}\right)^2-\frac{8}{n}+1+\cdots+4+\left(\frac{4n}{n}\right)^2-\frac{16n}{n}+1\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[20n+\frac{1^2+2^2+\cdots(4n)^2}{n^2}-\frac{4+8+\cdots+16n}{n}\right]$$, y aplicando las fórmulas ya conocidas:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[20n+\frac{4n(4n+1)(8n+1)}{6n^2}-\frac{2n(4+16n)}{n}\right] = \frac{1}{n}\left[20n+\frac{2(4n+1)(8n+1)}{3n}-8(1+4n)\right] =$$

$$= \frac{1}{3n^2}\left[60n^2+2(4n+1)(8n+1)-24n(1+4n)\right] = \frac{28n^2+2}{3n^2} = \frac{28}{3}+\frac{2}{3n^2}$$

El área del recinto es: $A = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{28}{3}+\frac{2}{3n^2}\right) = \frac{28}{3}$ u² .

14.23. Determina el área de la región limitada por la función $f(x)=x^3$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$. Para ello, utiliza la expresión: $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Se divide el intervalo [0, 1] en n subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$.

Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+...+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right]=\frac{1}{n}\left[\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}\right]=\frac{1}{n}\left[\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^3}\right]=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4n}+\frac{1}{4n^2}$$

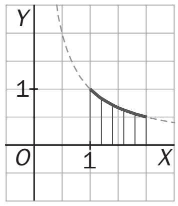
El área del recinto es: $A=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4n}+\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{1}{4}\ \text{u}^2$.

Sumas de Riemann. Integral definida

14.24. Esboza la gráfica de $f(x)=\frac{1}{x}$ en [1, 2] y divide este intervalo en 5 subintervalos para probar que:

$$0{,}2\left(\frac{1}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}4}+\frac{1}{1{,}6}+\frac{1}{1{,}8}+\frac{1}{2}\right)<\int_1^2\frac{1}{x}dx<0{,}2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}4}+\frac{1}{1{,}6}+\frac{1}{1{,}8}\right).$$

Observando el dibujo se aprecia que el área bajo la curva es mayor que la suma de las áreas de los rectángulos inferiores y menor que la suma de las áreas de los rectángulos superiores.



14.25. (PAU) Sin calcular las integrales, justifica cuál de ellas es mayor:

$$A=\int_0^1 x^2\operatorname{sen}^2 x\,dx \qquad B=\int_0^1 x\operatorname{sen}^2 x\,dx$$

Se ha estudiado que si $f(x)\geq g(x)$ en [a, b], entonces $\int_a^b f\geq\int_a^b g$.

En el intervalo [0,1] se cumple que $x\operatorname{sen}^2 x\geq x^2\operatorname{sen}^2 x$ para todo x de dicho intervalo, ya que $x\geq x^2$ si x pertenece a [0, 1]. Así pues, $\int_0^1 x\operatorname{sen}^2 x\,dx\geq\int_0^1 x^2\operatorname{sen}^2 x\,dx$ ya que no es el mismo integrando.

14.26. (PAU) Contesta, razonando la respuesta, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

c) Si $\int_a^b f(x)\,dx=0$, **entonces $a = b$.**

d) Si $\int_a^b f(x)\,dx=0$ **y** $f(x)>0$ **para todo x, entonces $a = b$.**

e) $\int_a^b[f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

a) Es verdadera. Es la propiedad 4 de la integral definida.

b) Es falsa. Por ejemplo, $\int_0^2 1\cdot x\,dx=2\neq\int_0^2 1\,dx\cdot\int_0^2 x\,dx=2\cdot 2=4$.

c) Es falsa. Por ejemplo, $\int_{-1}^1 x\,dx=0$.

d) Es verdadera. Si la función es positiva en [a, b], $\int_a^b f(x)\,dx$ mide el área bajo la curva, así pues, esa área solo puede ser cero si $a = b$.

e) Es verdadera. Es la propiedad 2 de la integral definida.

Teorema del valor medio

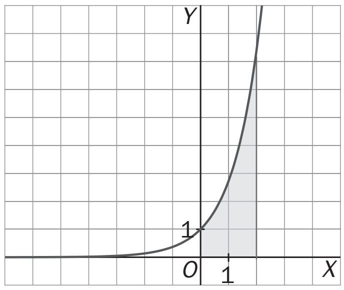
14.27. Halla el valor medio de la función $f(x) = (x-2)^2$ en el intervalo [0, 2] y la abscisa del punto en el que se alcanza dicho valor medio.

Se debe encontrar un número *c* del intervalo [0, 2] que cumpla $\int_0^2 (x-2)^2\, dx = f(c)\cdot(2-0)$.

$$\int_0^2 (x-2)^2\, dx = \left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{8}{3} = f(c)\cdot 2 \Rightarrow f(c) = \frac{4}{3} \Rightarrow (c-2)^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow c = 2+\frac{2\sqrt{3}}{3},\ c = 2-\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

pero solo la segunda pertenece al intervalo [0, 2].

14.28. La siguiente región está limitada superiormente por la gráfica de la función $y = e^x$.



Halla la altura que debe tener un rectángulo de base 2 para que su área sea igual a la de la región sombreada.

El área de la región sombreada es $\int_0^2 e^x\, dx = \left[e^x\right]_0^2 = e^2 - 1$.

El teorema del valor medio nos asegura que existe un número *c* del intervalo [0, 2] que cumple $\int_0^2 e^x\, dx = f(c)\cdot(2-0)$.

Así pues, $e^2 - 1 = f(c)\cdot 2 \Rightarrow f(c) = \frac{e^2-1}{2}$.

Por tanto, el rectángulo de base 2 y altura $\frac{e^2-1}{2}$ tiene igual área que el de la región.

14.29. (PAU) Sea $f:[-2,2]\to$ R continua en [– 2, 2] tal que: $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_1^2 f(t)dt$.

¿Se puede asegurar que existen *b* y *c* en [– 2, 2] tales que $b \le -1$, $c \ge 1$ y *f*(*b*) = *f*(*c*)? Justifica la respuesta.

Por el teorema del valor medio se sabe que:

A) Existe un número *c* del intervalo [1, 2] que cumple $\int_1^2 f(t)\,dt = f(c)\cdot(2-1) = f(c)$.

B) Existe un número *b* del intervalo [– 2, –1] que cumple $\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = f(b)\cdot(-1-(-2)) = f(b)$.

Como ambas integrales son iguales, se concluye que, en efecto, existen *b* y *c* en [– 2, 2] tales que $b \le -1$, $c \ge 1$ y *f*(*b*) = *f*(*c*).

14.30. Para hacer un estudio sobre la capacidad de memorizar de un niño se utiliza el siguiente modelo: si *x* es su edad en años, entonces su capacidad de memorizar viene dada por: $f(x) = 1 + 2x\ln x$ siendo $0 \le x \le 5$. Calcula el valor medio de capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños.

El teorema del valor medio nos asegura que existe un número *c* del intervalo [1, 3] que cumple

$\int_1^3 (1+2x\cdot\ln x)dx = f(c)\cdot(3-1)$. El valor *f*(*c*) será el valor medio pedido.

Se calcula, pues, el valor de la integral y luego se halla *f*(*c*):

$$\int (1+2x\cdot\ln x)dx = \int dx + 2\int x\cdot\ln x\, dx = x + 2\int x\cdot\ln x\, dx.$$

Esta última integral se calcula por partes: *f*(*x*) = ln*x* y *dg*(*x*) = *xdx*, por tanto, $df(x) = \frac{1}{x}dx$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$:

$$\int x\cdot\ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$$

Entonces: $\int(1+2x\cdot\ln x)dx = x+x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \int_1^3(1+2x\cdot\ln x)dx = \left[x+x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^3 = \frac{5}{2}+9\left(\ln 3-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{2}+9\left(\ln 3-\frac{1}{2}\right) = f(c)\cdot 2 \Rightarrow f(c) = \frac{5}{4}+\frac{9}{2}\left(\ln 3-\frac{1}{2}\right) \approx 3{,}94$ es el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y tercer cumpleaños.

La regla de Barrow

14.31. (TIC) Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 x\,\text{arctg}x\,dx$ **c)** $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$ **e)** $\int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\text{sen}\,xdx$ **d)** $\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx$ **f)** $\int_0^3 \frac{1}{1+2e^x}dx$

a) $\int x\,\text{arctg}\,x\,dx$ se hace por partes: $f(x) = \text{arctg}\,x$, $dg(x) = x$, por lo que $df(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ y

$\int x\,\text{arctg}x\,dx = \text{arctg}\,x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{2}dx \Rightarrow \int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x-\int\frac{1}{1+x^2}dx\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \int x\,\text{arctg}x\,dx = \text{arctg}x\,\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\text{arctg}x + C \Rightarrow \int_0^1 x\,\text{arctg}\,xdx = \left[\frac{x^2}{2}\text{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\text{arctg}\,x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

b) $\int x^2\,\text{sen}x\,dx$ se calcula por partes. Llamando $f(x) = x^2$ y $dg(x) = \text{sen}x$, es $df(x) = 2x$, $g(x) = -\cos x$, por lo que $\int x^2\,\text{sen}\,x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx$.

Para obtener ahora $\int 2x\cos x\,dx$, se procede de la misma forma: $f(x) = 2x$, $g'(x) = \cos x$, así que $f'(x) = 2$, $g(x) = \text{sen}x$, con lo que $\int x^2\,\text{sen}x\,dx = -x^2\cos x + \left[2x\,\text{sen}x - \int 2\,\text{sen}\,x\,dx\right] = -x^2\cos x + 2x\text{sen}\,x + 2\cos x + C$.

$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\text{sen}xdx = \left[-x^2\cos x+2x\,\text{sen}x+2\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$. Observa que la gráfica de la función $f(x) = x^2\text{sen}x$ es simétrica respecto al origen, y como el intervalo $[-\pi, \pi]$ está centrado en el origen, dicha integral es 0.

c) $\int\frac{dx}{x^2+2x} = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln x-\ln(x+2))+C$

$\int_1^2\frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\left[\ln x-\ln(x+2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2-\ln 4-\ln 1+\ln 3) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

d) $\int\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx = \int\frac{4x^2+1-4x}{4x^2+1}dx = \int\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+C$

$\int_0^1\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx = \left[x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\right]_0^1 = 1-\frac{\ln 5}{2}$

e) $\int_0^2\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \left[-\frac{1}{x^2+x+1}\right]_0^2 = -\frac{1}{7}+1 = \frac{6}{7}$

f) Cambio de variable: $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int\frac{1}{1+2e^x}dx = \int\frac{1}{1+2t}\cdot\frac{dt}{t} = \int\frac{1}{t(1+2t)}dt$, ahora se descomponen en fracciones simples:

$\frac{1}{t(1+2t)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-\frac{1}{2}} \Rightarrow A = -2, B = 2$, por tanto: $\int\frac{1}{t(1+2t)}dt = \int\frac{-2}{t}dt+\int\frac{2}{t-\frac{1}{2}}dt = -2\ln t+2\ln\left(t-\frac{1}{2}\right)$, y

deshaciendo el cambio:

$\int_0^3\frac{1}{1+2e^x}dx = \left[-2\ln e^x+2\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\right]_0^3 = \left[-2x+2\ln\left(e^x-\frac{1}{2}\right)\right]_0^3 = -6+2\ln\left(e^3-\frac{1}{2}\right)-2\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

14.32. Calcula el área que encierra una loma de la función *f*(*x*) = sen*x*.

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2 \text{ u}^2$$

14.33. Calcula el valor de la integral $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x\,dx$.

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x|\operatorname{sen}x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} |x|\operatorname{sen}x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} x\operatorname{sen}x\,dx = 0 + \left[-x\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} + \int_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx = -2\pi + \pi + 0 = -\pi.$$

14.34. La función $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$ nunca es negativa por lo que cualquier suma de Riemann sería positiva y el límite de cualquier suma de Riemann positivo. ¿Qué es erróneo entonces en el siguiente razonamiento?

$$\int_{-2}^{1} \frac{3}{x^4}dx = \left[3\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^{1} = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_{-2}^{1} = -1 - \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{9}{8}$$

$f(x) = \dfrac{3}{x^4}$ no está acotada en [– 2, 1] porque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{x^4} = +\infty \Rightarrow$ El límite de las sumas de Riemann no existe.

14.35. Calcula una aproximación por exceso y otra por defecto de ln 2 utilizando una partición en cinco subintervalos para calcular $\int_1^2 \dfrac{dx}{x}$.

Por defecto: Se toman 5 rectángulos de base 0,2 y altura el extremo derecho.
Por exceso: Se toman 5 rectángulos de base 0,2 y altura el extremo izquierdo.

$$0{,}2\left(\frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}6} + \frac{1}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right) < \int_1^2 \frac{1}{x}dx < 0{,}2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}6} + \frac{1}{1{,}8}\right)$$

Operando: $0{,}6456 < \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 < 0{,}7456$.

14.36. Sabiendo que $\sqrt[5]{2} \approx 1{,}1487$, puedes encontrar otra aproximación de ln2 haciendo una partición en cinco subintervalos para calcular $\int_0^1 2^x\,dx$. Utiliza la integral anterior y la regla de Barrow para demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)\right] = \ln 2$.

Se divide el intervalo [0, 1] en 5 subintervalos, cada uno de longitud $\dfrac{1}{5}$.

$$S_5 = \frac{1}{5}\left[2^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{2}{5}} + 2^{\frac{3}{5}} + 2^{\frac{4}{5}} + 2^{\frac{5}{5}}\right] = \frac{1}{5}\left[1{,}1487 + 1{,}1487^2 + 1{,}1487^3 + 1{,}1487^4 + 1{,}1487^5\right] \approx 1{,}545$$

Por otra parte, $\int_0^1 2^x dx = \left[\dfrac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{\ln 2} \Rightarrow \dfrac{1}{\ln 2} \approx 1{,}545 \Rightarrow \ln 2 \approx 0{,}64724$

Análogamente, se divide el intervalo [0, 1] en *n* subintervalos, cada uno de longitud: $\dfrac{1}{n}$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \cdots + 2^{\frac{n}{n}}\right] = \frac{1}{n}\left[2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \cdots + 2\right] = \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}} - 1}\right) = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}} - 1}\right) = \frac{\sqrt[n]{2}}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}}{\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)} = \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \ln 2$$

Funciones definidas por una integral. Teorema fundamental del cálculo

14.37. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ c) $f(x) = \int_1^{\cos x} \frac{dt}{t}$

b) $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{2t}$, $x > 0$ d) $f(x) = \int_x^{x^2+1} e^{-t^2} dt$

a) Aunque la integral $\int \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ no es elemental, pero $g(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ es continua para $t > 0$, el teorema fundamental del cálculo asegura que la derivada de $f(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ es $f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

b) $f(x) = \int_1^{\cos x} \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^{\cos x} = \ln(\cos x)$, su derivada $f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$.

c) $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}[\ln t]_x^{x^2} = \frac{1}{2}(\ln x^2 - \ln x) = \frac{1}{2}(2\ln x - \ln x) = \frac{\ln x}{2}$, su derivada es $f'(x) = \frac{1}{2x}$.

d) La integral $\int e^{-t^2} dt$ no es elemental, así que no se puede emplear el método de los dos apartados anteriores. La función $g(t) = e^{-t^2}$ es continua, así pues, $f(x) = [G(t)]_x^{x^2+1} = G(x^2+1) - G(x)$, siendo $G'(x) = e^{-x^2}$, por tanto: $f'(x) = G'(x^2+1) \cdot 2x - G'(x) = 2x \cdot e^{-(x^2+1)^2} - e^{-x^2}$

14.38. Calcula $\lim_{h \to 0} \frac{\int_1^{1+h} \sqrt{x^2+8}\, dx}{h}$**.**

Si se llama $f(x) = \sqrt{x^2+8}$ y $F(x)$ a una primitiva suya, $F'(x) = f(x)$, entonces,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_1^{1+h} \sqrt{x^2+8}\, dx}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(1+h) - F(h)}{h} = F'(1) = f(1) = \sqrt{1^2+8} = 3$$

14.39. (PAU) Dada la función $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$**, ¿tiene** $g(x)$ **puntos de inflexión? Razona tu respuesta.**

Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que la derivada de $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ es $g'(x) = e^{-x^2}$ y la segunda derivada es $g''(x) = -2xe^{-x^2}$, que se anula si $x = 0$. Además, la segunda derivada es positiva a la izquierda de $x = 0$ (g es cóncava hacia arriba) y es negativa a la derecha de $x = 0$ (g es cóncava hacia abajo). Así pues en $x = 0$ se produce un cambio de curvatura, por tanto, el punto $A(0, g(0)) = A(0, 0)$ es un punto de inflexión de $g(x)$.

14.40. (PAU) Calcula la derivada de la función $f(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$**.**

Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x) = \cos x^2$.

14.41. Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x)=\int_3^x t^2dt$

c) $f(x)=\int_3^{\text{sen}\,x} t^2dt$

b) $f(x)=\int_x^3 t^2dt$

d) $f(x)=\int_{x^2}^{1+x^3} t^2dt$

a) Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x)=x^2$.

b) Por las propiedades de la integral definida se sabe que $f(x)=\int_x^3 t^2dt=-\int_3^x t^2dt$. Por tanto, $f'(x)=-x^2$.

c) $f(x)=\int_3^{\text{sen}\,x} t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_3^{\text{sen}\,x}=\frac{\text{sen}^3 x}{3}-9$. Su derivada es $f'(x)=\text{sen}^2 x$.

d) $f(x)=\int_{x^2}^{1+x^3} t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{x^2}^{1+x^3}=\frac{(1+x^3)^3}{3}-\frac{x^6}{3}\Rightarrow f'(x)=\frac{3(1+x^3)^2 3x^2}{3}-\frac{6x^5}{3}=3x^2(1+x^3)^2-2x^5$.

14.42. Calcula la derivada de estas funciones:

a) $f(x)=\int_3^x \frac{1}{\ln(t^2+1)}dt$

b) $f(x)=\int_x^3 \frac{1}{\ln(t^2+1)}dt$

c) $f(x)=\int_3^{\text{sen}\,x} \frac{1}{\ln(t^2+1)}dt$

d) $f(x)=\int_{x^2}^{1+x^3} \frac{1}{\ln(t^2+1)}dt$.

La integral $\int \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}dt$ no es elemental pero sí se sabe que la función $g(t)=\frac{1}{\ln(t^2+1)}$ es continua.

a) Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x)=\frac{1}{\ln(x^2+1)}$.

b) $f(x)=\int_x^3 \frac{1}{\ln(t^2+1)}dt=-\int_3^x \frac{1}{\ln(t^2+1)}dt$, así pues, $f'(x)=-\frac{1}{\ln(x^2+1)}$.

c) $f(x)=[G(t)]_3^{\text{sen}\,x}=G(\text{sen}\,x)-G(3)$, siendo $G'(t)=\frac{1}{\ln(t^2+1)}$, por tanto:

$f'(x)=G'(\text{sen}\,x)\cos x=\frac{\cos x}{\ln(\text{sen}^2 x+1)}$

d) $f(x)=[G(t)]_{x^2}^{1+x^3}=G(1+x^3)-G(x^2)$, siendo $G'(t)=\frac{1}{\ln(t^2+1)}\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=G'(1+x^3)3x^2-G'(x^2)2x=\frac{3x^2}{\ln((1+x^3)^2+1)}-\frac{2x}{\ln(x^4+1)}$

14.43. (PAU) Sea $F(x)=\int_1^{x^2} \ln t\,dt$ con $x\geq 1$.

a) Calcula $F'(\text{e})$.

b) ¿Es una función constante? Justifica tu respuesta.

a) $F(x)=\int_1^{x^2}\ln t\,dt=[t\ln t-t]_1^{x^2}=x^2\ln x^2-x^2+1\Rightarrow F'(x)=2x\ln x^2+x^2\cdot\frac{2x}{x^2}-2x=2x\ln x^2=4x\ln x$

Por tanto, $F'(e)=4e\ln e=4e$.

b) $F''(x)=4\ln x+4x\cdot\frac{1}{x}=4\ln x+4$. No es una función constante porque su derivada no es nula.

14.44. (PAU) Sea la función $F(x)=\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ definida para $x \geq 1$. Halla los valores de x en los que alcanza sus máximos y mínimos relativos.

$F'(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Esta derivada se anula si sen$x$ = 0, es decir, si $x = \pi + k\pi$ con k = 0, 1, 2,… Máximo si k = 0, 2, 4,…, y mínimo si k = 1, 3, 5,…

14.45. (PAU) Dada la función $F(x)=\int_0^x (t^2-1)e^{-t^2}dt$, definida para todo $x \in$ R:

a) Calcula $F'(x)$, estudia el crecimiento de $F(x)$ y halla las abscisas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcula $F''(x)$, estudia la concavidad y convexidad de $F(x)$ y halla las abscisas de sus puntos de inflexión.

a) $F'(x)=(x^2-1)e^{-x^2}$. Esta derivada, $F'(x)$, se anula si x = – 1 o x = 1. Se estudia su signo:

x	$(-\infty,-1)$	–1	(–1, 1)	1	$(1,+\infty)$
Signo de F'	+	=0	–	=0	+
Comportamiento de F	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

b) La derivada segunda de F es $F''(x)=2x(2-x^2)e^{-x^2}$, que se anula si x = 0, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$:

x	$\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\left(-\sqrt{2},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{2}\right)$	$\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2},+\infty\right)$
Signo de F''	+	=0	–	=0	+	=0	–
F	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo

14.46. Demuestra la siguiente igualdad: $\int_0^b f(x)dx=\int_0^b f(b-x)dx$. Para ello, realiza el cambio $t=b-x$.

Se utiliza el teorema de sustitución en integrales definidas, notando que $g'(x)$ = –1.

$$\int_0^b f(b-x)dx=-\int_0^b f(g(x))g'(x)dx=-\int_{g(0)}^{g(b)} f(t)dt=-\int_b^0 f(t)dt=\int_0^b f(t)dt=\int_0^b f(x)dx.$$

14.47. (PAU) Sea $F(x)$ la función definida por $F(x)=\int_1^{e^x-x-1} e^{-t^2}dt$.

Halla los puntos en los que se anula la función $F'(x)$.

La integral $\int e^{-t^2}dt$ no es elemental, así que no se puede calcular dicha integral para después derivarla. La función $g(t)=e^{-t^2}$ es continua, así pues, $F(x)=[G(t)]_1^{e^x-x-1}=G(e^x-x-1)-G(1)$, siendo $G'(x)=e^{-x^2}$, por tanto: $F'(x)=G'(e^x-x-1)\cdot(e^x-1)-0=(e^x-1)\cdot e^{-(e^x-x-1)^2}$. Dicha derivada se anula si $e^x-1=0 \Rightarrow x=0$.

14.48. (PAU) Sea $F(x)=\int_0^{2x} e^{t^2}dt$. Calcula $F'(0)$.

La función $g(t)=e^{t^2}$ es continua, así pues, $F(x)=[G(t)]_0^{2x}=G(2x)-G(0)$, siendo $G'(x)=e^{x^2}$, por tanto:

$F'(x)=G'(2x)\cdot 2-0=2\cdot e^{(2x)^2} \Rightarrow F'(0) = 2$.

14.49. (PAU) Halla el punto del intervalo [0, 2] en el que la función $f(x)=\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}dt$ alcanza su valor mínimo.

Como la función $g(t)=\frac{t-1}{1+t^2}$ es continua, se sabe que la derivada de $f(x)$ es $f'(x)=\frac{x-1}{1+x^2}$.

Esta derivada se anula si $x = 1$ y como a la izquierda de 1 es negativa y a su derecha es positiva, en el punto de abscisa $x = 1$ se encuentra el mínimo de la función $f(x)$.

14.50. (PAU) a) Calcula los extremos relativos y absolutos de la función $f:[-7,1]\to R$ definida por $f(x)=x^3+6x^2+49$.

b) Sea β el punto en el que f alcanza su máximo absoluto. Calcula $\int_{-7}^{\beta} f(x)dx$.

a) $f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$ se anula si $x = 0$ ó si $x = 4$. Aplicando el criterio de la segunda derivada se ve que $A(-4, 209)$ es un máximo relativo y $B(0, 49)$ es un mínimo relativo. Se comparan los valores: $f(-4) = 209$; $f(0) = 49$; $f(-7) = 0$; $f(1) = 56$. Así pues, $A(-4, 209)$ es el máximo absoluto y $C(-7, 0)$ es el mínimo absoluto.

b) Ya se ha calculado $\beta = -4 \Rightarrow \int_{-7}^{-4}(x^3+6x^2+49)dx=\left[\frac{x^4}{4}+2x^3+49x\right]_{-7}^{-4}=\frac{675}{4}$

14.51. (PAU) a) Si f es una función continua, obtén $F'(x)$ siendo: $F(x)=\int_0^x\left(f(t)+t^2+t^3\right)dt$.

b) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt=1$, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

a) Como la función $g(t)=f(t)+t^2+t^3$ es continua, el teorema fundamental del cálculo asegura que la derivada de $F(x)$ es $F'(x)=f(x)+x^2+x^3$.

b) La ecuación de la recta tangente buscada es $y - F(1) = F'(1)(x - 1)$. Se calcula entonces $F(1)$ y $F'(1)$:

$$F(1)=\int_0^1\left(f(t)+t^2+t^3\right)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 t^2dt+\int_0^1 t^3dt=1+\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{19}{12}$$

$$F'(1)=f(1)+1^2+1^3=1+1+1=3$$

La recta tangente es $y-\frac{19}{12}=3(x-1)$, es decir, $y=3x-\frac{17}{12}$.

14.52. Dada $f(x)=\frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$, determina el valor del parámetro $a > 0$ para el que $\int_0^a f(x)\,dx=-1$.

$$\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2}dx=\left[\frac{2}{1+x^2}\right]_0^a=\frac{2}{1+a^2}-2=-1\Rightarrow \frac{2}{1+a^2}=1\Rightarrow 1+a^2=2\Rightarrow a=1, a=-1 \Rightarrow a=1$$

14.53. (PAU) Sean las funciones $F(x)=\int_1^x\sqrt{5+e^{t^2}}\,dt$ y $g(x) = x^2$; calcula $\left(F(g(x))\right)'$.

Como la función $f(t)=\sqrt{5+e^{t^2}}$ es continua, por el teorema fundamental del cálculo se tiene que su derivada es $F'(x)=\sqrt{5+e^{x^2}}$.

Aplicando la regla de la cadena, $\left(F(g(x))\right)'=F'(g(x))\cdot g'(x)=F'(x^2)\cdot 2x=2x\cdot\sqrt{5+e^{x^4}}$

14.54. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^{x^3} e^{t^2}dt}{x\int_0^{x^2} e^{t^2}dt}$.

Al presentarse una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ y estar en las hipótesis del teorema de L´Hôpital, se aplica la toma de derivadas en el límite y el teorema fundamental del cálculo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^2}dt}{x\int_0^{x^2} e^{t^2}dt} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^6}3x^2}{\int_0^{x^2} e^{t^2}dt + xe^{x^4}2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^5e^{x^6}3x^2 + 6x\,e^{x^6}}{2xe^{x^4} + 2x^2e^{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6xe^{x^6}[3x^6+1]}{2xe^{x^4}[1+x]} = +\infty$$

14.55. Si $\int_c^x f(t)\,dt$ **es** $5x^3 + 40$**, ¿quién es** $f(x)$**?, ¿cuánto vale** c**?**

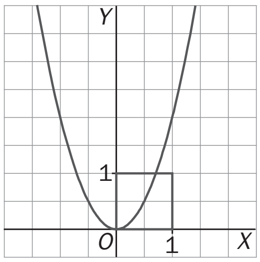
Sea $g(x) = \int_c^x f(t)\,dt = 5x^3 + 40$; entonces $g'(x) = f(x) = 15x^2$.

Por otra parte, tomando $x = c$, $g(c) = 0 = 5c^3 + 40$, de donde $c = -2$.

Áreas de recintos

14.56. La curva $y = 2x^2$ **divide al cuadrado de vértices** $V_1(0,0)$, $V_2(1,0)$, $V_3(1,1)$ **y** $V_4(0,1)$ **en dos recintos. Dibújalos y halla el área del recinto mayor.**

La abscisa del punto de intersección de la parábola y el segmento V_3V_4 es $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



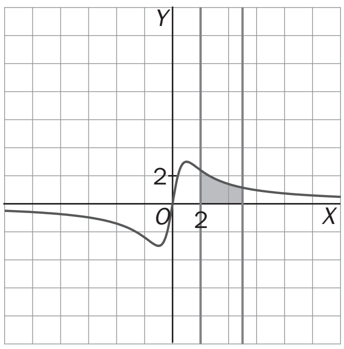
Por tanto, el área del recinto de la izquierda viene dada por la integral:

$$A_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2x^2)dx = \left[x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3} \approx 0{,}4714 \text{ u}^2$$

El área del recinto de la derecha es $A_2 = 1 - A_1 \approx 1 - 0{,}4714 = 0{,}5286$ u^2.

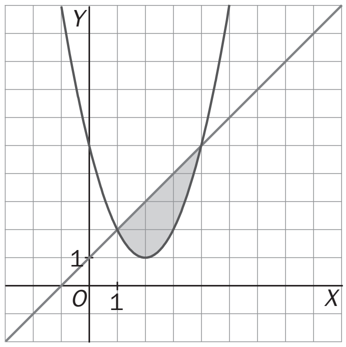
Con lo cual, el recinto mayor es el de la derecha.

14.57. Calcula el área encerrada entre $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ **y el eje de abscisas para** $x \in [2, 5]$.



$$A = \int_2^5 \left(\frac{6x}{x^2+1}\right)dx = \left[3\ln(x^2+1)\right]_2^5 = 3(\ln 26 - \ln 5) \text{ u}^2.$$

14.58. Dibuja la superficie limitada por la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ y la recta $y = x + 1$. Calcula el área de dicha superficie.



Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 5 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$.

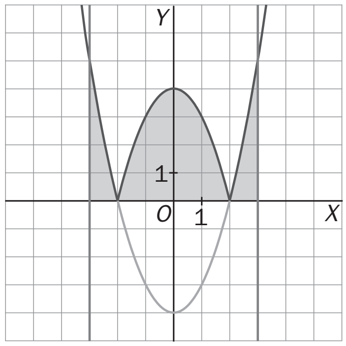
Los puntos de corte son $A(1, 2)$ y $B(4, 5)$.

La región está comprendida entre dos gráficas: la recta $y = x + 1$ está por encima y la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ está por debajo.

El área de la región es: $A = \int_1^4 (x + 1 - (x^2 - 4x + 5))\,dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx =$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \frac{9}{2}\ \text{u}^2$$

14.59. Dibuja la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-3, 3]$ y calcula su integral.



La gráfica de $f(x)$ se dibuja muy fácilmente a partir de la de la función $g(x) = x^2 - 4$, sin más que reflejar su parte negativa respecto al eje X. Como la función es positiva y simétrica respecto al eje Y, y el intervalo está centrado en el origen, se calcula la integral de esta forma:

$$\int_{-3}^{3} |x^2 - 4|\,dx = 2\int_0^2 (-x^2 + 4)\,dx + 2\int_2^3 (x^2 - 4)\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_0^2 + 2\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 = \frac{46}{3}$$

14.60. Halla el valor $a > 0$, tal que $\int_0^{a-1} (x + 1)\ dx = \frac{9}{2}$.

$$\int_0^{a-1} (x + 1)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{a-1} = \frac{(a-1)^2}{2} + a - 1 = \frac{9}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + 2a - 2 = 9 \Rightarrow a^2 = 10 \text{. Por tanto, } a = \sqrt{10}\text{.}$$

14.61. (PAU) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$. Se pide:

a) Calcula *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en todo R.

b) Para los valores de *a* y *b* obtenidos en el apartado anterior, calcula el área de la región acotada por la gráfica de *f*, el eje horizontal y las rectas *x* = 1, *x* = 3.

La función es $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{-x^2}{16} + \dfrac{1}{2} & \text{si} -2 < x < 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Está claro que la función es continua en el interior de los tres intervalos de definición. Se impone la condición de que sea continua en los extremos de estos intervalos.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4},\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \left(ax^2 + b\right) = 4a + b,\ f(-2) = \frac{1}{4} \Rightarrow 4a + b = \frac{1}{4} \Rightarrow 16a + 4b = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(ax^2 + b\right) = 4a + b,\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4},\ f(2) = \frac{1}{4}$$

Por tanto, $4a+b=\frac{1}{4}$, que es la misma ecuación que la anterior. Así pues, si $16a+4b=1$, la función será continua en todo **R**. Se impone ahora la condición de que también sea derivable.

La función derivada para valores de x distintos de –2 y 2 es: $f'(x)=\begin{cases}\frac{-2}{x^3} & \text{si } x<-2\\ 2ax & \text{si } -2<x<2\\ \frac{-2}{x^3} & \text{si } x>2\end{cases}$

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x)=\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{-2}{x^3}\right)=\frac{1}{4},\ \lim_{x\to -2^+} f'(x)=\lim_{x\to -2^+} 2ax=-4a \Rightarrow \frac{1}{4}=-4a\Rightarrow a=-\frac{1}{16}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-} 2ax=4a,\ \lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{-2}{x^3}\right)=-\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4}=4a\Rightarrow a=-\frac{1}{16}$$

Para este valor de a, $b=\frac{1}{4}-4a=\frac{1}{2}$. Así pues, si $a=-\frac{1}{16}$ y $b=\frac{1}{2}$, la función es continua y derivable en todo **R**.

b) $A=\int_1^2\left(\frac{-x^2}{16}+\frac{1}{2}\right)dx+\int_2^3\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{-x^3}{48}+\frac{x}{2}\right]_1^2+\left[\frac{-2}{x^3}\right]_2^3=\frac{17}{48}+\frac{1}{6}=\frac{25}{48}\ \text{u}^2$

14.62. (PAU) Halla el área de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$; $y = -2x^2 + 3$.

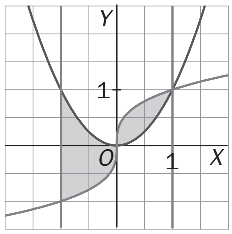
$x^2=-2x^2+3\Rightarrow 3x^2-3=0\Rightarrow x=-1, x=1$. Los puntos de corte son $A(-1, 1)$ y $B(1, 1)$.

La región está comprendida entre dos gráficas: $y = -2x^2 + 3$ está por arriba;

$y = x^2$ está por debajo. Como ambas funciones son simétricas respecto del eje Y, el área de la región es:

$$A=2\int_0^1(-2x^2+3-x^2)dx=2\int_0^1(-3x^2+3)dx=2\left[-x^3+3x\right]_0^1=4\ \text{u}^2$$

14.63. Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y=x^{\frac{1}{3}}$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

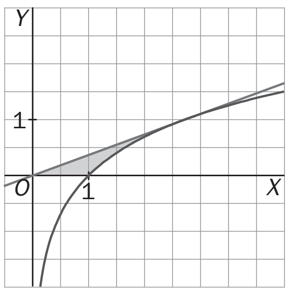


Las gráficas de las funciones se cortan en los puntos $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$.

La región está formada por dos trozos:

$$A=\int_{-1}^0(x^2-x^{1/3})dx+\int_0^1(x^{\frac{1}{3}}-x^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_{-1}^0+\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{3}{2}\ \text{u}^2$$

14.64. (PAU) Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x)=\ln x$, el eje X y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x = e$.



La recta tangente tiene por ecuación $y - f(e) = f'(e)(x - e)$, es decir $y=\frac{1}{e}x$.

El recinto está formado por dos regiones. Una, limitada por la recta tangente y el eje X entre 0 y 1, es un triángulo de base 1 y altura $\frac{1}{e}$, su área es $A_1=\frac{1}{2e}$.

El área de la otra es:

$$A_2=\int_1^e\left(\frac{x}{e}-\ln x\right)dx=\left[\frac{x^2}{2e}-x\ln x+x\right]_1^e=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-1.$$

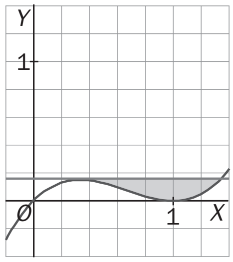
El área del recinto es $A=A_1+A_2=\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-1=\frac{e}{2}-1\ \text{u}^2$.

14.65. (PAU) Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2+2}$, calcula el área encerrada por la curva, el eje *X* y las rectas perpendiculares al eje *X* que pasan por el máximo y el mínimo de la función dada.

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$, que se anula si $x = -\sqrt{2},\ x = \sqrt{2}$.

Estudiando el signo de la derivada: $A\left(-\sqrt{2}, \dfrac{-\sqrt{2}}{4}\right)$ es mínimo y $B\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ es máximo. El recinto está comprendido entre $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$. Como la función es simétrica respecto del origen, el área pedida es igual a $A = 2\int_0^{\sqrt{2}} \dfrac{x}{x^2+2}\,dx = \left[\ln(x^2+2)\right]_0^{\sqrt{2}} = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2\ \text{u}^2$.

14.66. (PAU) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, y la recta tangente a dicha gráfica en el máximo relativo. Representa gráficamente la función hallando los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos.



La función corta al eje *Y* en el punto *O*(0, 0) y al eje *X* en los puntos *O*(0, 0) y *A*(1, 0).
La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ y se anula si $x = 1$ o si $x = \dfrac{1}{3}$.

$B\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{27}\right)$ es un máximo y *C*(1, 0) es un mínimo.

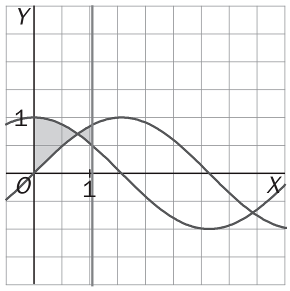
La recta tangente en el máximo es $y = \dfrac{4}{27}$.

Para hallar los puntos de corte de dicha tangente con la gráfica de la función, se resuelve la ecuación $x^3 - 2x^2 + x = \dfrac{4}{27}$, cuyas soluciones son $x = \dfrac{1}{3}$ y $x = \dfrac{4}{3}$. El recinto está limitado superiormente por la recta e inferiormente por la cúbica.

$$A = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{27} - (x^3 - 2x^2 + x)\right)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(-x^3 + 2x^2 - x + \frac{4}{27}\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{27}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{12}\ \text{u}^2$$

14.67. (PAU) a) Dibuja el recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{3}$.

b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.



a) El punto de corte de ambas funciones se encuentra resolviendo la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos x$, cuya única solución en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ es $x = \dfrac{\pi}{4}$.

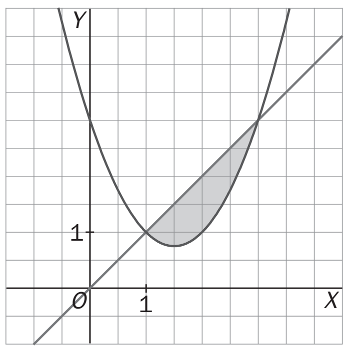
b) $A_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx = [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\pi/4}^{\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}$$

$$A = A_1 + A_2 = \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 3 - \sqrt{3}}{2}\ \text{u}^2$$

14.68. (PAU) a) Representa las curvas de ecuaciones $y = x^2 - 3x + 3$ e $y = x$ calculando dónde se cortan.

b) Halla el área del recinto limitado por dichas curvas.



a) Los puntos de corte se encuentran resolviendo la ecuación
$x^2 - 3x + 3 = x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 3$
Los puntos de corte son *A*(1, 1) y *B*(3, 3).
b) El recinto está limitado superiormente por la gráfica de $y = x^2 - 3x + 3$ e inferiormente por $y = x$. Su área viene dada por el valor de la integral:

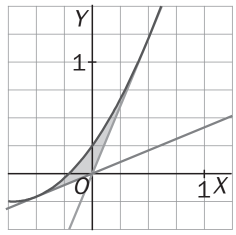
$$A = \int_1^3 \left(x - (x^2 - 3x + 3)\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = \frac{4}{3}\ \text{u}^2$$

14.69. (PAU) Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x^2 + \sqrt{2}\,x + \frac{1}{4}$.

a) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f y sus tangentes en los puntos de abscisa $x_0 = \frac{1}{2}$ y $x_1 = -\frac{1}{2}$.

b) Prueba que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos que tienen igual área.

a) La ecuación de la tangente en el punto de abscisa $x_0 = \frac{1}{2}$ es $y = (1+\sqrt{2})x$ y la de la tangente en el punto de abscisa $x_0 = -\frac{1}{2}$ es $y = (-1+\sqrt{2})x$.



b) Si $x < 0$, el área del recinto es:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(x^2 + \sqrt{2}\,x + \frac{1}{4} - (-1+\sqrt{2})x \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{24} \text{ u}^2$$

Si $x > 0$, el área del recinto es:

$$A = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \sqrt{2}\,x + \frac{1}{4} - (1+\sqrt{2})x \right) dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24} \text{ u}^2$$

14.70. Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, determina el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Esas dos funciones se cortan en los puntos $A(0, 0)$ y $B(1, 1)$. Se quiere hallar el área del recinto limitado superiormente por $g(x) = x^3$ e inferiormente por $f(x) = x^2$, entre $x = 1$ y $x = 2$.

El área la da la integral: $A = \int_1^2 (x^3 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{17}{12} \text{ u}^2$

14.71. (PAU) a) Halla el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Halla el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y el eje X para los valores $-1 \le x \le 0$.

a) La derivada de $f(x) = e^{-x}$ es $f'(x) = -e^{-x}$. La recta tangente a $f(x) = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$, es decir: $y = -e \cdot x$.

La recta normal es $y - f(-1) = \frac{-1}{f'(-1)}(x+1)$, es decir: $y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e} + e$.

Así pues, estas rectas cortan al eje de abscisas en los puntos de abscisas $x = 0$, $x = -e^2 - 1$, respectivamente, con lo que la base del triángulo en cuestión es $e^2 + 1$ y su altura e.

Su área es $\frac{e^3 + e}{2}$ u^2.

b) La región está siempre por encima del eje X. Su área es el valor de la integral:

$$A = \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x} \right]_{-1}^{0} = -1 + e = e - 1 \text{ u}^2$$

14.72. Calcular $a > 0$ para que el área encerrada por la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^a = -\cos a + \cos 0 = -\cos a + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$$

14.73. (PAU) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}$, calcula el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje *X*.

La función corta al eje X en los puntos $A(-\sqrt{12},\ 0)=A(-2\sqrt{3},\ 0)$ y $B(2\sqrt{3},\ 0)$.

El recinto está por debajo del eje X; además la función es simétrica respecto del eje Y, así pues, el área de la región viene dada por: $A=2\left(-\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{x^2-12}{x^2+4}dx\right)$

Se calcula esa integral:

$$\int\frac{x^2-12}{x^2+4}dx=\int\left(1-\frac{16}{x^2+4}\right)dx=\int dx-8\int\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=1-8\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$A=2\left(-\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{x^2-12}{x^2+4}dx\right)=-2\left[x-8\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{2\sqrt{3}}=-2\left(2\sqrt{3}-\frac{8\pi}{3}\right)=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

14.74. (PAU) a) Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y=x^3-3x$ en el punto de abscisa $x=-1$.

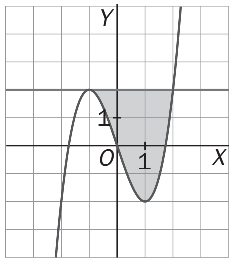
b) Dibuja el recinto limitado por dicha recta tangente y la curva dada y calcula el área.

a) La derivada de ecuación $y=x^3-3x$ es $f'(x)=3x^2-3$.

La ecuación de la recta tangente es $y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))$, es decir, $y=2$.

b) Los puntos de corte de la curva $y=x^3-3x$ y la recta $y=2$ se obtienen resolviendo la ecuación $x^3-3x=2\Rightarrow x^3-3x-2=0\Rightarrow(x+1)^2(x-2)=0$:

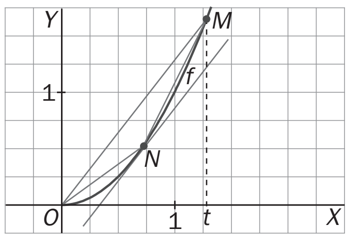
$A(-1,\ 2)$ y $B(2,\ 2)$ son los puntos de corte.



$$A=\int_{-1}^{2}(2-(x^3-3x))\,dx=\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}\ \text{u}^2$$

14.75. Sea $f(x)=x^2$. Calcula en función de *t* el área limitada por la parábola y la cuerda *OM*. Sea *N* el punto de la parábola en el que la tangente es paralela a dicha cuerda. Demuestra que el área del segmento parabólico es $\dfrac{4}{3}$ del área del triángulo *OMN* sea cual sea el valor de *t*.

El punto M tiene por coordenadas $M(t,\ t^2)$, así pues, la pendiente de OM es $\dfrac{t^2}{t}=t$. La recta tangente en el punto $N(n,\ n^2)$ tiene, pues, pendiente t, así pues, $f'(n)=t$, es decir, $2n=t$ y, por tanto, $n=\dfrac{t}{2}$. El punto N es $N\left(\dfrac{t}{2},\dfrac{t^2}{4}\right)$.



La recta que contiene a OM tiene por ecuación $y=tx$, así pues, el segmento parabólico tiene un área de:

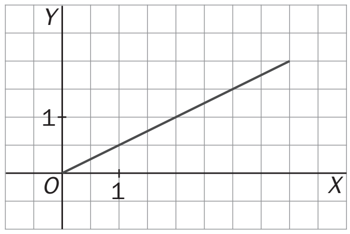
$$A_1=\int_0^t(tx-x^2)\,dx=\left[\frac{tx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^t=\frac{t^3}{2}-\frac{t^3}{3}=\frac{t^3}{6}\ \text{u}^2$$

La altura, h, del triángulo OMN: $h=d(N,OM)=d\left(\left(\dfrac{t}{2},\dfrac{t^2}{4}\right),tx-y=0\right)=\dfrac{\left|\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t^2}{4}\right|}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{t^2}{4\sqrt{t^2+1}}$

Por otra parte la longitud del segmento OM es $\sqrt{(t^2)^2+t^2}=t\sqrt{t^2+1}$. El área del triángulo es:

$A_2=\dfrac{t\sqrt{t^2+1}\,\dfrac{t^2}{4\sqrt{t^2+1}}}{2}=\dfrac{t^3}{8}$ u². Así pues, $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{4}{3}$, de donde $A_1=\dfrac{4}{3}A_2$, como se quería probar.

14.76. Halla el volumen del cono que se obtiene al girar alrededor del eje *X* la región comprendida entre el siguiente segmento y el eje horizontal, y comprueba que el resultado es correcto.



Se trata de hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $y = \frac{x}{2}$ alrededor del eje X.

Se sabe que dicho volumen es igual a:

$$V = \int_0^4 \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 \frac{x^2}{4}dx = \pi\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \pi\frac{4^3}{12} = \frac{16\pi}{3} \text{ u}^3$$

El sólido que se forma es un cono de radio 2 y altura 4. Su volumen es: $V = \frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 4 = \frac{16\pi}{3}$ u^3

14.77. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región bajo la gráfica de $y = \sqrt{x}\cdot \text{sen}\, x$ y por encima del eje horizontal, alrededor del eje *X* y con $x \in [0, \pi]$.

Se sabe que dicho volumen es igual a: $V = \int_0^\pi \pi\left(\sqrt{x}\,\text{sen}\,x\right)^2 dx = \pi\int_0^\pi x\,\text{sen}^2 x\, dx$

Se calcula por partes. Se llama $f(x) = x$ y $g'(x) = \text{sen}^2 x$, entonces, $f'(x) = 1$ y $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4}$.

$$\int x\,\text{sen}^2 x\,dx = x\left(\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4}\right) - \int\left(\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4}\right)dx = x\left(\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4}\right) - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(2x)}{8}$$

Así pues, $V = \pi\int_0^\pi x\,\text{sen}^2 x\,dx = \pi\left[x\left(\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4}\right) - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(2x)}{8}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{4}$ u^3

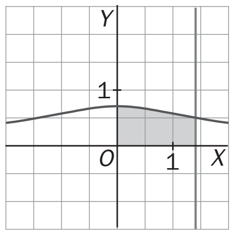
14.78. (PAU) Halla el volumen engendrado por la región plana definida por el eje *X*, la curva de ecuación $y = e^{-x}$, el eje *Y* y la recta $x = 3$, al girar alrededor del eje *X*.

$$V = \int_0^3 \pi\left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi\int_0^3 e^{-2x}dx = \pi\left[\frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^3 = \pi\left(\frac{-e^{-6}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^6}\right) \text{ u}^3$$

14.79. Calcula el volumen del cuerpo que se obtiene al girar en torno al eje *X* la región bajo la gráfica de la curva $y = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ y por encima del eje horizontal, entre las rectas $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$.

Se trata de hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $y = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ alrededor del eje X.

Se sabe que dicho volumen es igual a: $V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2+x^2}dx$



Se calcula esta integral que va a dar lugar a una arcotangente.

$$\int \frac{1}{2+x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

El volumen es: $V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2+x^2}dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot(\text{arctg}\,1 - \text{arctg}\,0) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}$ u^3

14.80. Halla el volumen del sólido formado cuando la región bajo la gráfica de $y=\sqrt{\text{sen } x}$ en el intervalo $[0,\ \pi]$ gira alrededor del eje *X*.

$$V=\int_0^{\pi}\pi\cdot f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\pi}\text{sen}\,x\,dx=\pi\,[-\cos x]_0^{\pi}=2\pi\ \text{u}^3$$

14.81. Calcula el volumen del paraboloide de revolución que se obtiene al girar la región comprendida entre la parábola $y=x^2$ y el eje horizontal, alrededor del eje *X* desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

Se sabe que dicho volumen es igual a: $V=\int_0^4\pi(x^2)^2\,dx=\pi\int_0^4 x^4\,dx=\pi\left[\dfrac{x^5}{5}\right]_0^4=\dfrac{1024\pi}{5}\ \text{u}^3$

14.82. Un móvil se desplaza siguiendo la trayectoria de la gráfica de la función $y=\sqrt{(x+1)^3}$, donde *x* representa el tiempo. Calcula el espacio recorrido en el intervalo de tiempo [0, 3].

$$S=\int_0^3\sqrt{(x+1)^3}\,dx=\left[\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}\right]_0^3=\frac{64}{5}\ \text{u}$$

14.83. La base de un sólido es la región del plano limitada por el eje *Y* y las rectas $y = 1 - x$, $y = 2x + 5$, $x = 3$. Cada sección perpendicular al eje *X* es un cuadrado. Halla su volumen.

Cada sección perpendicular al eje *x* es un cuadrado de lado $2x+5-(1-x)=3x+4$. Así pues, el volumen será $\int_0^3 A(x)\,dx=\int_0^3(3x+4)^2\,dx=\left[\dfrac{(3x+4)^3}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\right]_0^3=\dfrac{13^3}{9}-\dfrac{4^3}{9}=237\ \text{u}^3$

14.84. Determina el volumen generado al girar respecto al eje de abscisas la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$.

Ambas gráficas se cortan en los puntos $O(0, 0)$ y $A(2, 4)$.

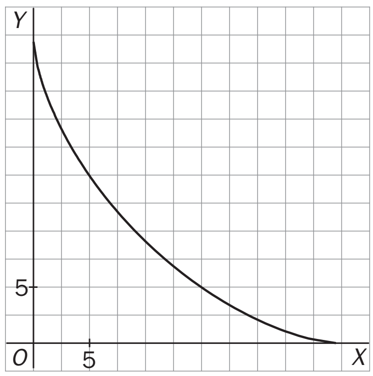
$$V=\int_0^2\pi(2x-x^2)^2\,dx=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)\,dx=\pi\left[\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{16\pi}{5}\ \text{u}^3$$

14.85. Esboza la gráfica de la función $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=9$ y halla la longitud de dicha curva entre $x = 1$ y $x = 27$.

$y^{\frac{2}{3}}=9-x^{\frac{2}{3}}$; $y=\left(9-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $y'=\dfrac{3}{2}\left(9-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

$y'^2=\dfrac{9-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$; $1+y'^2=\dfrac{9}{x^{\frac{2}{3}}}$; $\int\sqrt{1+y'^2}\,dx=9\cdot 3\sqrt[3]{x}\Rightarrow L=$

$\int_1^{27}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\left[27\sqrt[3]{x}\right]_1^{27}=27(9-1)=216$ u.



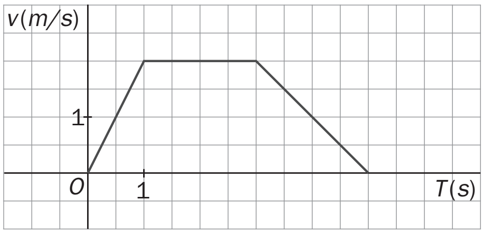
Aplicaciones

14.86. (PAU) La velocidad de un móvil que parte del origen viene dada en m/s por la siguiente gráfica:

a) Calcula la función espacio–recorrido.

b) Dibuja la gráfica de la función espacio–recorrido.

c) Prueba que el área bajo la curva que da la velocidad coincide con el espacio total recorrido.



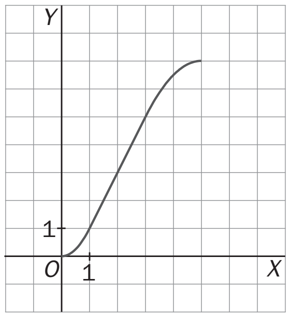
a) La función espacio recorrido es una primitiva de la velocidad, puesto que la velocidad es la derivada del espacio. Observando la gráfica, la función velocidad es continua y está definida a trozos por la siguiente expresión: $v(t)=\begin{cases}2t & \text{si } 0\le t<1\\ 2 & \text{si } 1\le t\le 3\\ -t+5 & \text{si } 3<t\le 5\end{cases}$, por tanto, el espacio recorrido será: $s(t)=\begin{cases}t^2+A & \text{si } 0\le t<1\\ 2t+B & \text{si } 1\le t\le 3\\ \dfrac{-t^2}{2}+5t+C & \text{si } 3<t\le 5\end{cases}$

Falta calcular los valores de los parámetros A, B y C:
Como $s(0) = 0$, entonces, $A = 0$. Además, por continuidad,
$\lim\limits_{x\to1^-} s(t)=\lim\limits_{x\to1^-} t^2=1$, $\lim\limits_{x\to1^+} s(t)=\lim\limits_{x\to1^+}(2t+B)=2+B$, $f(1) = 2 + B$. Así pues, $2 + B = 1$, es decir, $B = -1$.

$\lim\limits_{x\to3^-} s(t)=\lim\limits_{x\to3^-}(2t+B)=6-1=5$, $\lim\limits_{x\to3^+} s(t)=\lim\limits_{x\to3^+}\left(\dfrac{-t^2}{2}+5t+C\right)=\dfrac{21}{2}+C$, $f(3) = 5$. Así pues,

$\dfrac{21}{2}+C=5\Rightarrow C=-\dfrac{11}{2}$.

La función espacio recorrido es: $s(t)=\begin{cases}t^2 & \text{si } 0\le t<1\\ 2t-1 & \text{si } 1\le t\le 3\\ \dfrac{-t^2}{2}+5t-\dfrac{11}{2} & \text{si } 3<t\le 5\end{cases}$



b) La gráfica de la función espacio es la que se muestra.

c) El espacio total recorrido es $s(5) = 7$.

El área bajo la curva de la velocidad es la de un trapecio de altura 2 y bases 5 y 2 $\Rightarrow A=\dfrac{5+2}{2}\cdot 2=7$

PROBLEMAS

14.87. (PAU) Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta debido a la acción de una fuerza F que depende continuamente de la posición x del objeto en dicha línea recta. Se sabe que el trabajo realizado por la fuerza para mover el objeto desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dado por $W=\int_a^b F(x)dx$.

a) Si la fuerza es $F(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}$, calcula el trabajo para ir desde $x = 3$ hasta $x = 5$.

b) Determina razonadamente si la fuerza $G(x)=\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$ realiza más o menos trabajo que $F(x)$ para el mismo desplazamiento.

a) El trabajo es $W=\int_3^5 \dfrac{2}{(x-1)^2}dx=\left[\dfrac{2}{1-x}\right]_3^5=\dfrac{1}{2}$ J.

b) Al ser ambas fuerzas positivas en [3, 5], se pueden identificar los trabajos con las áreas que encierran las fuerzas bajo ellas.

Como $G(x)=\dfrac{2}{(x^2+1)^2}<\dfrac{2}{(x-1)^2}=F(x)$ en [3, 5], ya que el denominador de $G(x)$ es mayor que el de $F(x)$, se concluye que el trabajo de la fuerza $G(x)$ es menor que el de $F(x)$.

14.88. Sea $f:[-a,a]\to \mathbb{R}$ con $a > 0$ una función continua tal que $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$; contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Es necesariamente $f(x) = 0$ para todo x de $[-a, a]$?

b) ¿Es necesariamente $\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0$?

c) ¿Es necesariamente $\int_{-a}^{a} |f(-x)|\,dx = 0$?

d) ¿Cuánto vale $\int_{-a}^{a} (f(x)+2x)\,dx$?

a) No necesariamente, basta que f sea una función impar para que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Por ejemplo $f(x) = x$.

b) Al ser $|f(x)|$ una función no negativa y continua, de la igualdad $\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0$, se deduce necesariamente que $f(x) = 0$ en $[-a, a]$, pues si hubiera algún punto t en el que $|f(t)| > 0$, existiría un intervalo $[t - r, t + r]$ donde $|f(x)| > 0$, por lo que $\int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx \ge \int_{t-r}^{t+r} |f(x)|\,dx > 0$.

c) Haciendo $-x = t$ y $-dx = dt$, se tiene que $\int_{-a}^{a} |f(-x)|\,dx = -\int_{a}^{-a} |f(t)|\,dt = \int_{-a}^{a} |f(t)|\,dt$, y f es necesariamente nula por el razonamiento anterior.

d) $\int_{-a}^{a} (f(x)+2x)\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{-a}^{a} 2x\,dx = 0 + 0 = 0$

14.89. Calcula $\int_{-3}^{3} (x+5)\sqrt{9-x^2}\,dx$. Indicación: $(x+5)\sqrt{9-x^2} = x\sqrt{9-x^2} + 5\sqrt{9-x^2}$.

$\int_{-3}^{3} (x+5)\sqrt{9-x^2}\,dx = \int_{-3}^{3} x\sqrt{9-x^2}\,dx + 5\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$. La primera integral es 0 pues $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$ es una función impar y la segunda vale $5 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{45\pi}{2}$, pues $y = \sqrt{9-x^2}$ es la ecuación de la semicircunferencia positiva de centro (0, 0) y radio 3. Así pues, $\int_{-3}^{3} (x+5)\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{45\pi}{2}$.

14.90. Sea $F(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{t^2}dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Prueba que F es continua en R.

b) Demuestra que existe $F'(x)$ si $x \neq 0$.

c) Estudia si F es derivable en $x = 0$.

d) Estudia la continuidad de $F'(x)$.

a) El único punto problemático sería $x = 0$.

$\lim_{x\to 0^-} F(x) = 1$; $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}}{1} = 1$. Finalmente, como $F(0) = 1$, F es continua en 1.

b) Si $x < 0$, $F'(x) = -\text{sen } x$. Si $x > 0$, $F'(x) = \left(\frac{\int_0^x e^{t^2}}{x}\right)'$, que existe por tratarse de dos funciones derivables y no anularse el denominador.

c) Se calculan las derivadas laterales en $x = 0$, $F'(0^-) = -\operatorname{sen} 0 = 0$ pues si $x \le 0$, $F(x) = \cos x$.

$$F'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(h)-F(0)}{h} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^h e^{t^2}dt - h}{h^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{h^2}-1}{2h} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2h\, e^{h^2}}{2} = 0$$

Así pues, F es derivable en 0 y $F'(0) = 0$.

d) $F'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{x\cdot e^{x^2} - \int_0^x e^{t^2}dt}{x^2} & \text{si } x<0 \end{cases}$. Así pues, F' es continua de entrada, en $\mathbf{R} - \{0\}$. Se analiza la posible continuidad de $F'(x)$ en $x = 0$. $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{xe^{x^2} - \int_0^x e^{t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} - e^{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} xe^{x^2} = 0$

Como $\lim_{x\to 0^-} F'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-\operatorname{sen} x) = 0$ y $F'(0) = 0$, resulta que F' es continua en $x = 0$ y, por tanto, en **R**.

14.91. a) Comprueba que la función $f(x) = \cos 3x \cdot \operatorname{sen} x$ es impar y periódica de período π.

b) Demuestra que $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 3x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\pi} \cos 3x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = 0$.

a) f es impar pues $f(-x) = \cos(-3x)\operatorname{sen}(-x) = -\cos 3x \operatorname{sen} x = -f(x)$

$f(x + \pi) = f(x)$, pues $\cos(3x + \pi)\operatorname{sen}(x + \pi) = -\cos 3x\,(-\operatorname{sen} x) = \cos 3x \operatorname{sen} x = f(x)$

Finalmente, si $0 < t < \pi$, $f(x + t) \ne f(x)$ pues $f(x + t) = \cos(3x + t)\operatorname{sen}(x + t) = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(4x+2t) + \operatorname{sen} 2x\right]$ y

$f(x) = \cos 3x \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x\right]$, y al ser la función $y = \operatorname{sen} x$, periódica de período 2π, resulta que $\operatorname{sen}(4x + 2t) \ne \operatorname{sen} 4x$ pues $0 < 2t < 2\pi$.

b) Como f es periódica de período π, su integral sobre cualquier intervalo de longitud π valdrá lo mismo, por lo que las dos primeras igualdades están probadas, pues $\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \pi - 0 = \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.

La última igualdad es cierta porque $f(x) = \cos 3x \operatorname{sen} x$ es impar y el intervalo de integración es de la forma $[-a, a]$.

14.92. Calcula $\int_0^{\pi} |f(x)|\, dx$ siendo $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}$.

En el intervalo $[0, \pi]$, $\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2} \ge 0$ si $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$, siendo negativa en el resto.

$$I = \int_0^{\pi}\left|\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right)dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right)dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right)dx = \left[\frac{x}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[\frac{x}{2} + \cos x\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} + \left[\frac{x}{2} + \cos x\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 1 - \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6} - 2$$

14.93. Algunas de estas afirmaciones son verdaderas y otras falsas. Justifica cómo es cada una de ellas:

a) $\int_2^4 \ln t\,dt = \int_1^4 \ln t\,dt - \int_1^2 \ln t\,dt$ **c) Si** $f(x)=\int_1^{x^3} t^3\,dt \Rightarrow f'(x)=\int_1^{x^3} 3t^2\,dt$ **.**

b) $\int_{-2}^{2} \frac{x^3-2x}{x^4+x^2+1}dx = 0$ **d)** $\int_{-2}^{0}\frac{1}{x-1}dx = [\ln(x-1)]_{-2}^{0}$ **.**

a) Verdadera, pues $\int_1^2 \ln t\,dt + \int_2^4 \ln t\,dt = \int_1^4 \ln t\,dt$.

b) Verdadera, pues $f(x)=\frac{x^3-2x}{x^4+x^2+1}$ es una función impar.

$$f(-x)=\frac{(-x)^3-2(-x)}{(-x)^4+(-x)^2+1}=\frac{-x^3+2x}{x^4+x^2+1}=-\frac{x^3-2x}{x^4+x^2+1}=-f(x)$$

c) Falsa. $f'(x) = 3x^2 x^6 = 3x^8$, que no tiene nada que ver con $\int_1^{x^3} 3t^2\,dt = \left[t^3\right]_1^{x^3} = x^9 - 1$.

d) Falsa. $\int_{-2}^{0}\frac{1}{x-1}dx$ es un número, representado por $[\ln|x-1|]_{-2}^{0}$, que es $0 - \ln 3 = -\ln 3$, mientras que $[\ln(x-1)]_{-2}^{0}$ no representa ningún número real pues ni $\ln(-1)$ ni $\ln(-3)$ son números reales.

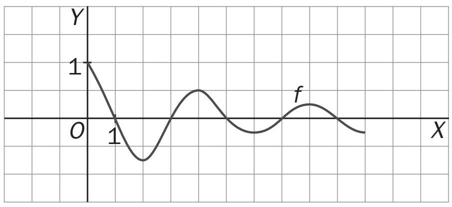
14.94. Obtén los números *A*, *B* y *C*, siendo: $A=\int_0^2 (1-|1-t|)^3 dt$, $B=\int_{-1000}^{1000}(t^3+4t^7)dt$, $C=\sum_{k=1}^{5}\int_k^{k+1}\sqrt{t}\,dt$ **.**

$$A=\int_0^2 (1-|1-t|)^3 dt = \int_0^1 (1-(1-t))^3 dt + \int_1^2 (1+1-t)^3 dt = \int_0^1 t^3 dt + \int_1^2 (2-t)^3 dt = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left[(2-t)^4\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

$B=\int_{-1000}^{1000}(t^3+4t^7)dt = 0$ pues $f(t)=t^3+4t^7$ es una función impar.

$$C=\sum_{k=1}^{6}\int_k^{k+1}\sqrt{t}\,dt=\int_1^2\sqrt{t}\,dt+\int_2^3\sqrt{t}\,dt+...+\int_5^6\sqrt{t}\,dt=\int_1^6\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_1^6=\frac{2}{3}\left(6\sqrt{6}-1\right)=4\sqrt{6}-\frac{2}{3}$$

14.95. Sea $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ **donde la gráfica de *f* es la de la figura:**



a) ¿Tiene *g* algún máximo relativo en [0, 10]? Si es así, ¿dónde está localizado?

b) Si hay, da un mínimo relativo de *g* en [0, 10].

c) ¿Para qué valor de *x* alcanza *g* el máximo absoluto en [0, 10]? ¿Y el mínimo absoluto?

d) ¿En qué subintervalo de [0, 10] es la gráfica de *g* cóncava hacia arriba?

e) Esboza la gráfica de *g*.

Al ser $g'(x) = f(x)$, se ve que $g'(x) = 0$ si $x = 1, 3, 5, 7, 9$.

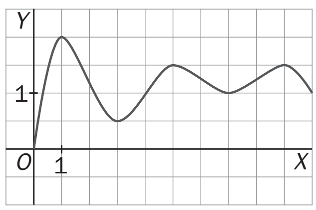
a) En los puntos de abscisa 1, 5, 9, $g'(x)$ pasa de ser positiva a negativa, luego g pasa de ser creciente a decreciente, es decir, se trata de máximos relativos.

b) En los puntos de abscisa 3, 7, $g'(x)$ pasa de ser negativa a positiva, así que en ellos $g(x)$ presenta mínimos relativos.

c) Se estudia el valor de g en $x = 0$ y $x = 10$ y en los puntos del interior en los que se anula la derivada.

$g(0)=\int_0^0 f = 0$; $g(1) > 0$, $g(3) < g(1)$, $g(5) < g(1)$, $g(7) < g(1)$ pues $g(7) < g(5)$, $g(9) = g(5)$ y $g(10) < g(9)$.

Así pues, el máximo absoluto de g se alcanza en $x = 1$. Análogamente, se ve que el mínimo se alcanza en 3.



d) $g''(x) > 0$ si $f'(x) > 0$ y eso ocurre en $(2, 4)\cup(6, 8)$.

e) La gráfica se muestra a la derecha.

14.96. (PAU) De una función integrable $f:[-1, 1] \to R$ se sabe que para $x \in [-1, 1]$ es $|f(x)| \le 1+x^2$.

De los números –3; –2; –1; 2,5 y 2,75; ¿cuántos pueden ser el valor de la integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$?

Como $-(1 + x^2) \le f(x) \le 1 + x^2$, se tiene que $-\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx \le \int_{-1}^{1} f(x)dx \le \int_{-1}^{1}(1+x^2)dx$.

Es decir, $-\frac{8}{3} \le \int_{-1}^{1} f(x)dx \le \frac{8}{3}$ por lo que solo –2, –1 y 2,5 podrían ser el valor de la integral.

14.97. Se pretende obtener $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+2\operatorname{sen} x}dx$.

a) Calcula $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\operatorname{sen} x}dx$.

b) Obtén $I + J$ y deduce el valor de I.

a) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\operatorname{sen} x}dx = \frac{1}{2}[\ \ln|1+2\operatorname{sen} x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3$

b) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + \cos x}{1+2\operatorname{sen} x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(2\operatorname{sen} x+1)}{1+2\operatorname{sen} x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1$. Así pues, $I = 1 - \frac{1}{2}\ln 3$.

14.98. Sean $I = \int_0^1 t\cos^2(\pi t)dt$ y $J = \int_0^1 t\operatorname{sen}^2(\pi t)dt$. Justifica si son ciertas o no estas afirmaciones:

a) $I > 0,\quad J > 0$

b) $I - J = \int_0^1 t\cos(2\pi t)\,dt$

c) $I + J = 1$

d) $I = J = \frac{1}{2}$

a) Verdadero, pues, en [0, 1], las funciones continuas $f(t) = t\cos^2(\pi t)$ y $g(t) = t\operatorname{sen}^2(\pi t)$ son no negativas y no idénticamente nulas.

b) $I + J = \int_0^1 t\left[\cos^2(\pi t)+\operatorname{sen}^2(\pi t)\right]dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$. Falso.

c) $I - J = \int_0^1 t\left[\cos^2(\pi t)-\operatorname{sen}^2(\pi t)\right]dt = \int_0^1 t\cos(2\pi t)dt$. Verdadero.

d) Como $I + J = \frac{1}{2}$, es imposible que $I = J = \frac{1}{2}$. Así que d es falso.

14.99. (PAU) Si $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, ¿se verifica entonces que $\int_{-a}^{a} xf(x)dx = 0$? Si fuese cierto, pruébalo, si fuera falso, pon un ejemplo que lo confirme.

Es falso: basta que f sea impar para que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Por ejemplo $f(x) = x$, por lo que

$\int_{-a}^{a} x\,f(x)dx = \int_{-a}^{a} x^2\,dx \ne 0$.

14.100. (PAU) Sea $f(x)$ una función tal que, para cualquier que sea $x > 0$ se cumple que $\int_{-x}^{0} f(x)dx = -\int_{-x}^{0} f(x)dx$.

Prueba que, $f(-x) = f(x)$ para todo $x > 0$.

Como $\int_{-x}^{0} f = -\int_{0}^{x} f$, $\int_{-x}^{0} f + \int_{0}^{x} f = 0 \Rightarrow \int_{-x}^{x} f = 0$, sea cual fuere $x > 0$.

Se considera entonces la función $G(x) = \int_{-x}^{x} f$. Como $G(0) = 0$ y $G(x) = 0$ para cualquier $x > 0$ y además $G(-x) = \int_{x}^{-x} f = 0$, resulta que G es la función idénticamente nula, luego $G'(x) = 0$. Pero $G(x) = H(x) - H(-x)$ con $H'(t) = f(t)$ pues f es continua. Así pues, $G'(x) = H'(x) + H'(-x)$, o sea $f(x) + f(-x) = 0$ implica que $f(-x) = -f(x)$ como se quería probar.

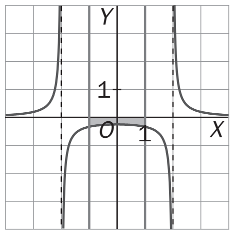
14.101. a) Esboza la gráfica de la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

b) ¿Es la integral $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{x^2 - 4} dx$ positiva o negativa? Justifica tu respuesta.

c) Halla la integral anterior descomponiendo el integrando en fracciones simples.

d) Un amigo dice que esa integral se hace más fácil con la sustitución $x = 2\sec\alpha$. ¿Tú qué piensas?

a) La gráfica se muestra a la derecha.



b) Como en $[-1, 1]$, $f(x) < 0$, es $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{x^2 - 4} dx < 0$.

c) $\dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{A}{x + 2} + \dfrac{B}{x - 2}$ con $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{1}{4}$

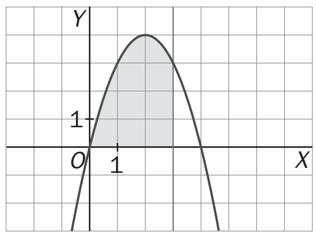
Así pues, $\int_{-1}^{1} \dfrac{1}{x^2 - 4} dx = \dfrac{1}{4} \ln \left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|_{-1}^{1} = \dfrac{1}{4}\left(\ln\dfrac{1}{3} - \ln 3\right) = -\dfrac{1}{2} \ln 3$

d) Como $x \in [-1, 1]$, carece de sentido llamar $x = \dfrac{2}{\cos x}$ pues $\left|\dfrac{2}{\cos\alpha}\right| \geq 2$.

14.102. Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0) = P(2) = 1$ y que $\int_{0}^{2} P(x)\,dx = \dfrac{1}{3}$.

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. $P(0) = c = P(2) = 4a + 2b + c = 1$, es decir, $4a + 2b = 0$ y $c = 1$. Por otra parte, $\int_{0}^{2} (ax^2 + bx + 1)dx = \dfrac{1}{3}$, es decir: $a \cdot \dfrac{8}{3} + 2b + 2 = \dfrac{1}{3}$, con lo que si $2a + b = 0$ y $\dfrac{4}{3}a + b = -\dfrac{5}{6}$, se tiene que $\dfrac{2}{3}a = \dfrac{5}{6}$, $a = \dfrac{5}{4}$, $b = -\dfrac{5}{2}$, y $P(x) = \dfrac{5}{4} x^2 - \dfrac{5}{2} x + 1$.

14.103. En la figura se muestra la parte positiva de la gráfica de $y = 4x - x^2$. Encuentra la ecuación de una recta vertical para que el área de la zona sombreada sea de 9 u^2.



Sea $x = a$ La recta vertical señalada

$\int_{0}^{a} (4x - x^2)dx = 9$, es decir: $\left[2x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^a = 9$, $2a^2 - \dfrac{a^3}{3} = 9$, $a^3 - 6a^2 + 27 = 0$,

$(a - 3)(a^2 - 3a - 9) = 0$, $a = 3$, pues las otras soluciones no están en $[0, 4]$.

14.104. Sea g : R → R una función continua tal que si $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ y sea $f(x) = \int_{-x}^{x} g(t)\,dt$.

a) Calcula $g(0)$.

b) Estudia la continuidad de f en R y obtén $f'(x)$.

a) Como g es continua en 0, se tiene que $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1$.

b) f es continua en **R** pues es derivable ya que g es continua y, al ser $f(x) = \int_{-x}^{x} g = \int_{-x}^{0} g + \int_{0}^{x} g$, se tiene que:

$f(x) = \left(-g(-x)\right)(-1) + g(x) = g(-x) + g(x)$

14.105. Sea f una función continua y positiva en el intervalo [0, 1]. Halla razonadamente el número de raíces en (0, 1) de la función $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_x^1 f(t)\,dt$.

La función $F(x)$ es continua en [0, 1] (pues es derivable), siendo $F(0) = \int_0^0 f - \int_0^1 f = 0 - \int_0^1 f < 0$ pues f es positiva en [0, 1].

Análogamente, $F(1) = \int_0^1 f - \int_0^1 f = \int_0^1 f - 0 > 0$. Así pues, F tiene al menos una raíz en (0, 1). Se estudia $F'(x)$.

$F'(x) = f(x) - f(x)(-1) = 2f(x) > 0$. Así pues, como $F'(x)$ nunca se hace cero en (0, 1), se desprende que F no puede tener más de una raíz en dicho intervalo por lo que, junto al argumento anterior, se concluye que solo tiene una raíz.

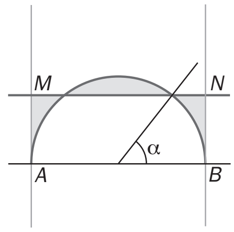
14.106. Obtén una fórmula explícita para la función f sabiendo que es derivable en todo R, que si $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$ y que para todo $x \in$ R se verifica que $[f(x)]^2 = \int_0^x te^t f(t)\,dt$.

De la igualdad $[f(x)]^2 = \int_0^x te^t f(t)dt$, se obtiene, derivando, $2f(x)\,f'(x) = xe^x\,f(x)$. Así pues, si $x \neq 0$, como $f(x) \neq 0$, resulta $2\,f'(x) = xe^x$, por lo que $f(x) = \dfrac{1}{2}\int xe^x dx = \dfrac{1}{2}[xe^x - e^x] + C$.

Por otra parte, $(f(0))^2 = \int_0^0 te^t f(t)dt = 0$, así que $f(0) = 0$ y como se indica que la igualdad dada es válida para todo $x \in$ **R**, se tiene que $f(0) = 0 = \dfrac{1}{2}[0 \cdot e^0 - e^0] + C$, por lo que $C = \dfrac{1}{2}$, así que $f(x) = \dfrac{1}{2}[xe^x - e^x] + \dfrac{1}{2}$.

14.107. La figura muestra un semicírculo de radio 1, diámetro horizontal *AB* y rectas tangentes en *A* y *B*. ¿A qué distancia del diámetro debe colocarse la recta horizontal *MN* para minimizar el área de la región sombreada?

Hazlo de dos formas diferentes: minimizando una función dada con una integral y minimizando una función que dependa del ángulo α.



Se toma un sistema de ejes perpendiculares con origen en el centro del semicírculo, cuya ecuación sería:

$y = \sqrt{1-x^2}$. Sea $y = k$ la ecuación de la recta *MN* y se escribe el área sombreada en función de *k*.

$$\text{Área} = 2\left[\int_0^{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx - k\sqrt{1-k^2} + k\left(1-\sqrt{1-k^2}\right) - \int_{\sqrt{1-k^2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_1^{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx + k - 2k\sqrt{1-k^2}\right] = f(k)$$

Para obtener el mínimo valor de $f(x)$, con $k \in [0, 1]$, se calcula su derivada respecto de *k*.

$$f'(k) = 2\left[k\cdot\frac{(-k)}{\sqrt{1-k^2}} + k\frac{(-k)}{\sqrt{1-k^2}} + 1 - 2\left(\sqrt{1-k^2} - \frac{k^2}{\sqrt{1-k^2}}\right)\right] = 2\left[\frac{-2k^2}{\sqrt{1-k^2}} + 1 - 2\sqrt{1-k^2} + \frac{2k^2}{\sqrt{1-k^2}}\right] =$$

$= 2\left[1-2\sqrt{1-k^2}\right]$. Así pues, $f'(k) = 0$ si $\sqrt{1-k^2} = \frac{1}{2}$, $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Así pues, la recta *MN* se debe situar a una distancia de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ del diámetro *AB.* Se comprueba, posteriormente, que para ese valor de *k*, *f* alcanza el mínimo absoluto.

Se resuelve ahora el problema sin utilizar el cálculo integral, como indica el enunciado. El área sombreada es:

$$2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{1+1-\cos\alpha}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{\alpha}{2}\right] = 2\left[\frac{\pi}{4} - \alpha + \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right] = f(\alpha) \text{ con } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$f'(\alpha) = 2[-1 + \cos\alpha - \cos 2\alpha] = 0$, si $\cos 2\alpha - \cos\alpha + 1 = 0$, es decir, $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - \cos\alpha + 1 = 0$, es decir, $2\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$. Así pues, $\cos\alpha = 0$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Se nota que el valor $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ corresponde al valor de $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ obtenido por el procedimiento anterior.

Se comprueba que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ corresponde efectivamente al mínimo absoluto.

Si $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $f(0) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 1\right] = 2\left[1 - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{4-\pi}{2} \approx 0{,}43$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right] = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6} \approx 0{,}34$$

Así pues, el mínimo valor corresponde a $\alpha = \frac{\pi}{3}$ o $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

14.108. Demuestra que el recinto encerrado por la parábola $f(x) = \frac{2}{a^2}x - \frac{1}{a^3}x^2$, con *a* > 0 y el eje *X*, tiene área que no depende de *a*. ¿Cuánto vale esta área? ¿Qué curva describen los vértices de estas parábolas?

$\int_0^{2a}\left(\frac{2}{a^2}x - \frac{1}{a^3}x^2\right)dx = \left[\frac{2}{a^2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{a^3}\frac{x^3}{3}\right]_0^{2a} = \frac{2}{a^2}2a^2 - \frac{1}{a^3}\frac{8a^3}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$, independiente de *a*. Los vértices de estas parábolas son los puntos de abscisa *a* y ordenada $\frac{2}{a^2}a - \frac{1}{a^3}a^2 = \frac{1}{a}$, es decir, $y = \frac{1}{x}$.

14.109. a) Escribe $\int \text{sen}^n x\, dx$ en términos de $\int \text{sen}^{n-2} x\, dx$. (Indicación: haz $f(x) = \text{sen}^{n-1} x$ y $g'(x) = \text{sen}\, x$ e integra por partes).

b) Utiliza el apartado anterior para demostrar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x\, dx$.

c) Si n es un entero positivo impar, prueba la fórmula de Wallis: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x\, dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}$.

a) $\int \text{sen}^n x\,dx = -\text{sen}^{n-1}x \cos x + \int (n-1)\text{sen}^{n-2} x \cos^2 x\,dx = -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\,(1 - \text{sen}^2 x)dx =$

$= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\,dx \;-(n-1)\int \text{sen}^n x\,dx$

$n\int \text{sen}^n x\,dx = -\text{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\,dx \Rightarrow \int \text{sen}^n x\,dx = \frac{-1}{n}\text{sen}^{n-1}x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\,dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x\,dx = \left[-\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x\,dx$, es decir, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x\,dx =$
$\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x\,dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-2} x\,dx = \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-4} x\,dx$, es decir: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{n-4} x\,dx$. Reiterando, si n es un entero positivo impar: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\,\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, x\,dx = \frac{n-1}{n}\,\frac{n-3}{n-2}\,\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1.$

14.110. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{1-x}$.

a) Calcula $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$. Para cada $n \ge 1$, sea $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

b) Demuestra que si $x \in [0, 1]$, entonces $x^n \le x^n e^{1-x} \le ex^n$.

c) Calcula $J_n = \int_0^1 x^n\,dx$ y prueba que si $n \ge 1$, entonces $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$. Deduce que I_n no es un número entero.

d) Mediante la integración por partes demuestra que $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

e) Sea $k_n = n!e - I_n$. Escribe k_{n-1} en función de k_n y prueba que k_n es un número entero para todo n.

f) Utilizando los apartados c y d prueba que $n!e = k_n + I_n$ no es un número entero.

g) Demuestra que el número e es irracional.

a) $I_1 = \int_0^1 xe^{1-x}dx = \left[-xe^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot e^{1-x}dx = e-2$

b) Si $x \in [0, 1]$, $1 \le e^{1-x} \le e$, así que $x^n \le x^n \cdot e^{1-x} \le e \cdot x^n$

c) $\frac{1}{n+1} \le \int_0^1 x^n e^{1-x} \le e\cdot\frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1} \Rightarrow$ si $n \ge 2$, es $\frac{1}{3} \le I_n \le \frac{e}{3}$, $I_1 = e-2 \Rightarrow$ no enteros

d) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx = \left[-x^{n+1}\cdot e^{1-x}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}dx = -1 + (n+1)\, I_n$

e) $k_{n+1} = (n+1)!e - I_{n+1} = (n+1)!e - (n+1)I_n + 1 = (n+1)[n!e - I_n] + 1 = (n+1)k_n + 1$ para $n > 1$ y si $n = 1$, $k_1 = 1!e - I_1 = e - (e-2) = 2$. Así pues k_n es entero para $n \ge 1$.

f) Como, según c, I_n no es entero con $n \ge 1$, sigue que $n!e = k_n + I_n$ no es entero con $n \ge 1$.

g) Si $n!e$ no es entero, e es irracional pues, en caso contrario, $e = \frac{a}{b}$, se tomaría $n = b$ y $n!e$ sería entero.

RELACIONA Y CONTESTA

Elige la única respuesta correcta en cada caso:

14.1. **Si $f(x) = \int_0^x tg^4 t\, dt$ y $g(x) = 2x^2$, entonces $(g \circ f)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ es igual a:**

A) $2\pi - 1$

B) $3\pi - \frac{1}{4}$

C) $2\pi - \frac{2}{3}$

D) $\pi - \frac{8}{3}$

E) $1 + \frac{\pi}{2}$

D) $(g \circ f)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$G(x) = 2x^2$, $g'(x) = 4x$. $f(x) = \int_0^x \text{tg}^4\, t\, dt$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^4\, t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2\, t\,(1 + \text{tg}^2 t - 1)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2\, t\,(1 + \text{tg}^2 t)\, dt -$

$- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2\, t\, dt = \left[\frac{1}{3}\text{tg}^3\, t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \text{tg}^2\, t - 1)\, dt = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \text{tg}^2\, t)\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{3} - [\text{tg}\, t]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\ t\ ]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

Por otra parte, $f'(x) = \text{tg}^4 x$, con lo que $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

$g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) = \pi - \frac{8}{3}$. Así pues, $(g \circ f)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{8}{3}$.

14.2. **Sobre la integral $\int_0^{2\pi} |\text{sen}\, x|\, dx$ se puede afirmar:**

A) Vale 0.

B) No existe, pues $y = |\text{sen}\, x|$ no es integrable.

C) Vale 4.

D) Es $|-\cos 2\pi| + |\cos 0|$.

E) Vale -1.

C) $\int_0^{2\pi} |\text{sen}\, x|\, dx = \int_0^{\pi} |\text{sen}\, x|\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\text{sen}\, x|\, dx = \int_0^{\pi} \text{sen}\, x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}\, x dx =$

$= [-\cos x\ ]_0^{\pi} + [\cos x\ ]_{\pi}^{2\pi} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

14.3. **Sea f una función definida en el intervalo abierto (0, 4) con derivada segunda f'' continua. Si f tiene extremos locales en los puntos 1 y 2, de la integral $I = \int_1^2 x f''(x) dx$, se puede asegurar que:**

A) $I = f(2) - f(1)$

B) $I = f(1) - f(2)$

C) $I = 2 f'(2) - f'(1)$

D) $I = f'(1) - f'(2)$

E) $I = f''(2) - f''(1)$

B) $I = \int_1^2 x\, f''(x)\, dx = [xf'(x)\ ]_1^2 - \int_1^2 f'(x)\, dx = [xf'(x)\ ]_1^2 - [f(x)\ ]_1^2 = 2\, f'(2) - f'(1) - (f(2) - f(1))$. Al tener f extremos locales en 1 y 2, es $f'(2) = f'(1) = 0$ por lo que $I = f(1) - f(2)$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas:

14.4. Para cualquier número natural $n = 1, 2, 3, \ldots$, se llama $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$.

A) $I_1 = \ln 2$

B) $I_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$

C) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

D) La sucesión I_n es creciente.

E) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \dfrac{\pi}{4}$

B, C, E) Al ser $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$, es $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$ por lo que A es falsa.

Como $\dfrac{t^n}{1+t^2}$ es mayor o igual que 0 en [0, 1], $I_n \geq 0$, y B es verdadera.

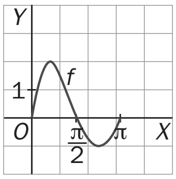
$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$ verifica $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2}dt \leq I_n \leq \int_0^1 t^n\,dt$ pues $t \in [0, 1]$. Así pues, $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, y C es verdadera.

$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \geq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}dt = I_{n+1}$, por lo que la sucesión I_n es decreciente, y D es falsa.

$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \left[\operatorname{arctg} t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, con lo que E es verdadera.

14.5. Sea f la función definida en $[0, \pi]$ cuya representación gráfica es la de la figura.

A) $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx \geq 0$



B) $\displaystyle\int_0^\pi |f(x)|dx = \left|\int_0^\pi f(x)dx\right|$

C) $\displaystyle\left|\int_0^\pi f(x)dx\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(x)dx$

D) El valor medio de f en $[0, \pi]$ es 0.

E) El valor medio de f en $[0, \pi]$ es inferior a 1.

A y E) La afirmación A es verdadera pues $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx > -\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(x)dx$.

B es falsa, pues $\displaystyle\int_0^\pi |f(x)|\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ y $\displaystyle\left|\int_0^\pi f(x)dx\right| < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

C es falsa, pues $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx > 0$ por lo que $\displaystyle\left|\int_0^\pi f(x)dx\right| = \int_0^\pi f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(x)dx \neq$

$\displaystyle\neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(x)dx$.

D es falsa, pues $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx \neq 0$.

E es verdadera ya que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \frac{\pi}{2}\cdot 2 = \pi$, por lo que el valor medio de f en $[0, \pi]$ es menor que $\dfrac{\pi}{\pi} = 1$.

14.6. **Sean** $I = \int_0^1 t\cos^2(\pi t)dt$ **y** $J = \int_0^1 t\,\mathrm{sen}^2(\pi t)\,dt$ **.**

A) $I > 0$ **y** $J > 0$

B) $I - J = \dfrac{1}{4\pi^2}$

C) $I + J = 1$

D) $I \le 1$

E) $I - J \le \int_0^1 \cos 2\pi t\,dt$

A, D y E) A es verdadera pues las funciones continuas $f(t) = t\cos^2(\pi t)$ y $g(t) = t\,\mathrm{sen}^2(\pi t)$ son no negativas en el intervalo [0, 1].

$I - J = \int_0^1 t\cos(2\pi t)\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\Big[t\,\mathrm{sen}\,2\pi t\Big]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{1}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,2\pi t\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\Big[t\,\mathrm{sen}\,2\pi t\Big]_0^1 + \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{1}{2\pi}\cos\Big[2\pi t\Big]_0^1 = 0,$
por lo que B es falsa.

$I + J = \int_0^1 t\,dt = \dfrac{1}{2}$, con lo que C es falsa.

$I = \int_0^1 t\cos^2\pi t\,dt \le \int_0^1 t\,dt = \dfrac{1}{2}$, por lo que D es verdadera.

Finalmente, $I - J = \int_0^1 t\;\cos(2\pi\,t)\,dt \le \int_0^1 \cos(2\pi t)\,dt$, así que E es también verdadera.

14.7. **Si** $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}\right)dx$ **, entonces:**

A) $I = \ln\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}} + \ln\dfrac{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}}{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}}$

B) $I = -\ln\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

C) $I = \ln\sqrt{3} - 2\ln\sqrt{2}$

D) $I = \dfrac{1}{2}\ln 3$

E) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{2}{\mathrm{sen}\,2x}dx$

B, D y E) Una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}$ es la función $g(x) = -\ln\cos x + \ln\mathrm{sen}\,x$, es decir

$g(x) = \ln\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} = \ln\mathrm{tg}\,x$. Así pues $I = \Big[\ln\mathrm{tg}\,x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4} - \ln\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{6} = -\ln\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}\ln 3.$

La afirmación A es falsa, pues $\ln\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}} + \ln\dfrac{\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}}{\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}} = \ln\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}} = \ln\dfrac{2\cos\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}}{2\cos\frac{\pi}{6}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}} = \ln\dfrac{\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}}{\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}} = \ln\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$

$= \ln\dfrac{2}{\sqrt{3}} \ne \ln\sqrt{3}$ que es la respuesta correcta, la D.

B es verdadera, ya que se ha calculado $I = \ln\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4} - \ln\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{6} = -\ln\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{6}$.

C es falsa pues $\ln\sqrt{3} - 2\ln\sqrt{2} = \ln\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ne \ln\sqrt{3}$.

Finalmente, E también es verdadera, pues $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x}{\mathrm{sen}\,x\cos x}dx =$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{2}{2\,\mathrm{sen}\,x\cos x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{2}{\mathrm{sen}\,2x}dx$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas:

14.8. Sea *f* una función continua en [*a*, *b*].

a) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = 0$ **b)** $f\ (x) = 0$ **en [*a*, *b*]**

A) a $\Leftrightarrow$ b

B) a $\Rightarrow$ b pero *b* $\not\Rightarrow$ a

C) b $\Rightarrow$ a pero a $\not\Rightarrow$ b

D) a y b se excluyen entre sí.

E) Nada de lo anterior.

C) Si $f(x) = 0$ en [*a*, *b*], es $\int_a^b f(x)dx = 0$, por lo que $b \Rightarrow a$. Obviamente $a \not\Rightarrow b$, como lo justifica cualquier función cuya gráfica sea como la del ejercicio; es decir, simétrica respecto del punto medio del intervalo [*a*, *b*].

Señala el dato innecesario para contestar:

14.9. Para calcular $\int_0^8 f(x)dx$ **nos dan estos datos:**

a) $f(x)$ es periódica de período 4 .

b) $f(x)$ es una función par .

c) $f(x) = x$ para $0 \le x < 2$

d) $f(x) = 4 - x$ para $2 \le x < 4$

A) Puede eliminarse el dato a.

B) Puede eliminarse el dato b.

C) Puede eliminarse el dato c.

D) Puede eliminarse el dato d.

E) No puede eliminarse ningún dato.

B) Con los datos a, c y d se tiene perfectamente definida la función *f* en [0, 8], pues se tiene en [0, 4] por c y d, y a nos dice que es periódica de período 4. Así pues, puede eliminarse el dato b.

Analiza si la información suministrada es suficiente para contestar la cuestión:

14.10. Para decidir el signo de $\int_a^b f(x)dx$ **siendo *f* una función continua en [*a*, *b*] se sabe que:**

a) $f(a) > 0$ y $f\ (x) \ge 0$ en [*a*, *b*]

b) $f(b) > 0$ y $f'\ (x) \le 0$ en [*a*, *b*]

A) Cada información es suficiente por sí sola.

B) a es suficiente por sí sola, pero b, no.

C) b es suficiente por sí sola, pero a, no.

D) Son necesarias las dos juntas.

E) Hacen falta más datos.

A) La información a es suficiente por sí sola, pues, según ella, *f* es creciente en [*a*, *b*] y, al ser $f(a) > 0$, *f* es positiva en [*a*, *b*] con lo que ya se sabe el signo de $\int_a^b f(x)dx$.

La información b también es suficiente por sí sola pues, según ella, *f* es decreciente en [*a*, *b*] y, al ser $f(b) > 0$, *f* es positiva en [*a*, *b*] y ya se tiene, entonces, el signo de $\int_a^b f(x)dx$.