1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ calcula:

a) $A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & -3\end{pmatrix}$

b) $A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -7\end{pmatrix}$

c) $2A-3B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 3\\ 12 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -6 & -16\end{pmatrix}$

d) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 4 & 1\cdot 1+2\cdot 2\\ 3\cdot 0+(-5)\cdot 4 & 3\cdot 1+(-5)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ -20 & -7\end{pmatrix}$

e) $B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot(-5)\\ 4\cdot 1+2\cdot 3 & 4\cdot 2+2\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 10 & -2\end{pmatrix}$

f) $(A+B)^t\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & -3\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+7\cdot 4 & 1\cdot 1+7\cdot 2\\ 3\cdot 0+(-3)\cdot 4 & 3\cdot 1+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & 15\\ -12 & -3\end{pmatrix}$

g) $(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ -20 & -7\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{44} & -\frac{5}{44}\\ \frac{5}{11} & \frac{2}{11}\end{pmatrix}$

Dada $(A\cdot B)=\begin{pmatrix}8 & 5\\ -20 & -7\end{pmatrix}$ sea $(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

$$(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}8 & 5\\ -20 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}8x+5z & 8y+5t\\ -20x-7z & -20y-7t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}8x+5z=1\\ -20x-7z=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}x=-\frac{7}{44}\quad\text{y}\quad z=\frac{5}{11}$$

$$\left.\begin{array}{l}8y+5t=0\\ -20y-7t=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}y=\frac{2}{11}\quad\text{y}\quad t=-\frac{5}{44}$$

Por tanto, $(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{44} & -\frac{5}{44}\\ \frac{5}{11} & \frac{2}{11}\end{pmatrix}$

h) $(A\cdot B)^t - B^2 = \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -23 \\ -3 & -15 \end{pmatrix}$

$(A\cdot B)^t = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -20 & -7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

$B^2 = B\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

i) $(A-I_2)^t \cdot B^{-1}$

- $(A-I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-I_2)^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

- Dada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ sea $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$B\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z & t \\ 4x+2z & 4y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} z = 1 \\ 4x+2z = 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad z = 1$

$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ 4y+2t = 1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad t = 0$

Por tanto, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $(A-I_2)^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -7 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ calcula:

a) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

b) $B-A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A+3B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 15 & 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 12 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

d) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 19 & -3 & 15 \end{pmatrix}$

$F_1\cdot C_1=1\cdot 2+3\cdot 0+0\cdot 5=2$

$F_1\cdot C_2=1\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 0=4$

$F_1\cdot C_3=1\cdot 0+3\cdot(-1)+0\cdot 3=-3$

$F_2\cdot C_1=0\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot 5=5$

$F_2\cdot C_2=0\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 0=2$

$F_2\cdot C_3=0\cdot 0+2\cdot(-1)+1\cdot 3=1$

$F_3\cdot C_1=(-3)\cdot 2+0\cdot 0+5\cdot 5=19$

$F_3\cdot C_2=(-3)\cdot 1+0\cdot 1+5\cdot 0=-3$

$F_3\cdot C_3=(-3)\cdot 0+0\cdot(-1)+5\cdot 3=15$

e) $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & -4 \\ 25 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

f) $A^3 - B = \begin{pmatrix} -8 & 21 & 24 \\ -24 & -1 & 39 \\ -93 & -72 & 116 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 20 & 24 \\ -24 & -2 & 40 \\ -98 & -72 & 113 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -3 & 4 & 7 \\ -18 & -9 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 21 & 24 \\ -24 & -1 & 39 \\ -93 & -72 & 116 \end{pmatrix}$$

g) $(A^t - B)^t = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right]^t = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

h) $B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -15 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -25 & 5 \\ -9 & 14 & -3 \\ 68 & -102 & 21 \end{pmatrix}$

- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 10 & -15 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \end{pmatrix}$

- Otra forma de calcular A^{-1} es mediante el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^*=F_3+3F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^*=-2F_3+9F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 9 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2^*=F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 9 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1^*=-2F_1+3F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -20 & 30 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 9 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_1:(-2) \\ F_2:(2) \\ F_3\cdot(-1)}}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -15 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -9 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -15 & 3 \\ -3 & 5 & -1 \\ 6 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

i) $$(A\cdot B)^t - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 19 & -3 & 15 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & -4 \\ 25 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 19 \\ 4 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & -4 \\ 25 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 20 \\ 9 & 1 & 1 \\ -28 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$A\cdot B$ y B^2 las hemos calculado en los apartados d) y e) respectivamente.

3. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4\\5\\0\\-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7 & 9\\4 & 0 & 1 & -2\\0 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}7 & 2\\1 & -1\\0 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}$

$E=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\3 & 0 & 4\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ calcula:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\0\\-1\end{pmatrix}=4-5+0-5=-6$

b) $B\cdot A=\begin{pmatrix}4\\5\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4 & 12 & 20\\5 & -5 & 15 & 25\\0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 1 & -3 & -5\end{pmatrix}$

c) $A_{1x4}\cdot C_{3x4}$ no se puede efectuar porque el número de columnas de A no coincide con el número de filas de C.

d) $C_{3x4}\cdot A_{1x4}$ no se puede efectuar porque el número de columnas de C no coincide con el número de filas de A.

e) $C\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7 & 9\\4 & 0 & 1 & -2\\0 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\18\\14\end{pmatrix}$

f) $B_{4x1}\cdot C_{3x4}$ no se puede efectuar porque el número de columnas de B no coincide con el número de filas de C.

g) $A\cdot D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 2\\1 & -1\\0 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -1\end{pmatrix}$

h) $C\cdot D=\begin{pmatrix}3 & 2 & 7 & 9\\4 & 0 & 1 & -2\\0 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 2\\1 & -1\\0 & 2\\2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41 & 0\\24 & 14\\5 & -3\end{pmatrix}$

i) $E^3 = E \cdot E \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 14 & 1 & 9 \\ 13 & 1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -29 & -8 & -38 \\ 49 & -5 & 17 \\ 51 & -2 & 24 \end{pmatrix}$

j) $(E-2I) \cdot E = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -7 \\ 8 & 1 & 1 \\ 9 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

k) $E \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 & 19 \\ 9 & 18 & 25 & 31 \\ 10 & 13 & 18 & 19 \end{pmatrix}$

l) E^{-1}

- $E^{-1} = \dfrac{1}{|E|} \cdot Adj(E^t)$

$|E| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 8 - 3 - 8 + 9 = -10$

$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(E^t) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -1 & 8 & -11 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Por tanto, $E^{-1} = \dfrac{1}{|E|} \cdot Adj(E^t) = -\dfrac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -1 & 8 & -11 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{11}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$

- Otra forma de calcular E^{-1} es mediante el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3^*=F_3+(-1)F_1]{F_2^*=2F_2+(-3)F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 11 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^*=3F_3+(-2)F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 11 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^*=-10F_1+F_3]{F_2^*=10F_2+11F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & 10 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 30 & 0 & 3 & -24 & 33 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1^*=-3F_1+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 0 & 0 & 24 & -12 & 24 \\ 0 & 30 & 0 & 3 & -24 & 33 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2:(30)\\ F_3:(-10)}]{F_1:(60)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{11}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \end{array}\right) \Rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{11}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

4. Halla la inversa de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}7&4\\-9&-3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}3&2\\1&-1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\3&0&4\\2&1&3\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\-2&-2&1\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}-1&6&-2\\-2&12&-5\\-1&5&-2\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}1&4&5\\3&-1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix}7&4\\-9&-3\end{pmatrix}$

  - Dada $A=\begin{pmatrix}7&4\\-9&-3\end{pmatrix}$ sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}7&4\\-9&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}7x+4z&7y+4t\\-9x-3z&-9y-3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}7x+4z=1\\-9x-3z=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}x=-\frac{1}{5}\quad \text{y}\quad z=\frac{3}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}7y+4t=0\\-9y-3t=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}y=-\frac{4}{15}\quad \text{y}\quad t=\frac{7}{15}$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&-\frac{4}{15}\\\frac{3}{5}&\frac{7}{15}\end{pmatrix}$

- $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$

  - Dada $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$ sea $B^{-1}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

$$B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x-z&y-t\\2z&2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x-z=1 \\ 2z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x=1 \quad \text{y} \quad z=0$$

$$\left.\begin{array}{l} y-t=0 \\ 2t=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad t=\frac{1}{2}$$

Por tanto, $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  - Dada $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sea $C^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$C\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x+2z=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x=1 \quad \text{y} \quad z=0$$

$$\left.\begin{array}{l} y+2t=0 \\ t=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y=-2 \quad \text{y} \quad t=1$$

Por tanto, $C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $D=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

  - Dada $D=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sea $D^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$D\cdot D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2t \\ x-z & y-t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}3x+2z=1\\ x-z=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x=\frac{1}{5} \quad \text{y} \quad z=\frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}y-t=0\\ 2t=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y=\frac{2}{5} \quad \text{y} \quad t=-\frac{3}{5}$$

Por tanto, $D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

- $E=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

  - $E^{-1}=\frac{1}{|E|}\cdot Adj(E^t)$

$$|E|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=0-8-3-8+9=-10$$

$$E=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow E^t=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(E^t)=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -4\\ -1 & 8 & -11\\ 3 & -4 & 3\end{pmatrix}$$

Por tanto, $E^{-1}=\frac{1}{|E|}\cdot Adj(E^t)=-\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 2 & -4\\ -1 & 8 & -11\\ 3 & -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{11}{10}\\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{10}\end{pmatrix}$

  - Otra forma de calcular E^{-1} es mediante el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3^*=F_3-F_1]{F_2^*=2F_2+(-3)F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 11 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3^*=3F_3+(-2)F_2}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 11 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1^*=-10F_1+F_3]{F_2^*=10F_2+11F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & 10 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 30 & 0 & 3 & -24 & 33 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1^*=-3F_1+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 60 & 0 & 0 & 24 & -12 & 24 \\ 0 & 30 & 0 & 3 & -24 & 33 \\ 0 & 0 & -10 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_1:(60)\\ F_2:(30)\\ F_3:(-10)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{11}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \end{array}\right) \Rightarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{11}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

- $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- $F^{-1} = \dfrac{1}{|F|} \cdot Adj(F^t)$

$$|F| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-(0+0+0) = 1$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(F^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $F^{-1} = \dfrac{1}{|F|} \cdot Adj(F^t) = \dfrac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Otra forma de calcular F^{-1} es mediante el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^*=F_3+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1^*=F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $G=\begin{pmatrix}-1 & 6 & -2\\ -2 & 12 & -5\\ -1 & 5 & -2\end{pmatrix}$

  - $G^{-1}=\dfrac{1}{|G|}\cdot Adj(G^t)$

$$|G|=\begin{vmatrix}-1 & 6 & -2\\ -2 & 12 & -5\\ -1 & 5 & -2\end{vmatrix}=24+30+20-(24+25+24)=1$$

$$G=\begin{pmatrix}-1 & 6 & -2\\ -2 & 12 & -5\\ -1 & 5 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow G^t=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 6 & 12 & 5\\ -2 & -5 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(F^t)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -6\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Por tanto, $G^{-1}=\dfrac{1}{|G|}\cdot Adj(G^t)=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -6\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -6\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$

  - Otra forma de calcular G^{-1} es mediante el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 12 & -5 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3^*=F_3+(-1)F_1]{F_2^*=F_2+(-2)F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3^*=F_2]{F_2^*=F_3}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1^*=F_1+(-2)F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 6 & 0 & 5 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{F_1^*=F_1+6F_2}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 6\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{F_1\cdot(-1)\\ F_2\cdot(-1)\\ F_3\cdot(-1)}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)\Rightarrow G^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -6\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

- $H=\begin{pmatrix}1&4&5\\3&-1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$

  - $H^{-1}=\dfrac{1}{|H|}\cdot Adj(H^t)$

$$|H|=\begin{vmatrix}1&4&5\\3&-1&2\\0&1&3\end{vmatrix}=-3+0+15-(0+2+36)=-26$$

$$H=\begin{pmatrix}1&4&5\\3&-1&2\\0&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow H^t=\begin{pmatrix}1&3&0\\4&-1&1\\5&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(H^t)=\begin{pmatrix}-5&-7&13\\-9&3&13\\3&-1&-13\end{pmatrix}$$

Por tanto, $H^{-1}=\dfrac{1}{|G|}\cdot Adj(H^t)=\dfrac{1}{-26}\cdot\begin{pmatrix}-5&-7&13\\-9&3&13\\3&-1&-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{26}&\frac{7}{26}&-\frac{1}{2}\\\frac{9}{26}&-\frac{3}{26}&-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{26}&\frac{1}{26}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

  - Otra forma de calcular H^{-1} es mediante el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&4&5&1&0&0\\3&-1&2&0&1&0\\0&1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2^*=F_2+(-3)F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&4&5&1&0&0\\0&-13&-13&-3&1&0\\0&1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3^*=13F_3+F_2}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&4&5&1&0&0\\0&-13&-13&-3&1&0\\0&0&26&-3&1&13\end{array}\right)\xrightarrow[F_1^*=26F_1+(-5)F_3]{F_2^*=2F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}26&104&0&41&-5&-65\\0&-26&0&-9&3&13\\0&0&26&-3&1&13\end{array}\right)\xrightarrow{F_1^*=F_1+4F_2}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}26&0&0&5&7&-13\\0&-26&0&-9&3&13\\0&0&26&-3&1&13\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{F_1:(26)\\F_2:(-26)\\F_3:(26)}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{5}{26}&\frac{7}{26}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{9}{26}&-\frac{3}{26}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{3}{26}&\frac{1}{26}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow H^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{26}&\frac{7}{26}&-\frac{1}{2}\\\frac{9}{26}&-\frac{3}{26}&-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{26}&\frac{1}{26}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

5. Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A = B + P$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$.

- Despejamos X

$$X \cdot A = B + P \Rightarrow X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I_2} = (B+P) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (B+P) \cdot A^{-1}$$

- $B + P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

- Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x - z & y - t \\ 2x + 4z & 2y + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x - z = 1 \\ 2x + 4z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad z = -\frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} y - t = 0 \\ 2y + 4t = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y = \frac{1}{6} \quad \text{y} \quad t = \frac{1}{6}$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

- Luego, $X = (B+P) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$

6. Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$, siendo $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Despejamos X

$$M \cdot X + N = P \Rightarrow M \cdot X = P - N \Rightarrow \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I_2} \cdot X = M^{-1} \cdot (P - N) \Rightarrow X = M^{-1} \cdot (P - N)$$

- $P - N = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

- Dada $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ sea $M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x + z & 2y + t \\ -x + 2z & -y + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + z = 1 \\ -x + 2z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2y + t = 0 \\ -y + 2t = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y = -\frac{1}{5} \quad \text{y} \quad t = \frac{2}{5}$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

- Luego, $X = M^{-1} \cdot (P - N) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

7. Resuelve la ecuación matricial $X\cdot A\cdot B=C$, siendo $A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

- Despejamos X

$$X\cdot A\cdot B=C\Rightarrow X\cdot A\cdot \underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I_2}=C\cdot B^{-1}\Rightarrow X\cdot A=C\cdot B^{-1}\Rightarrow X\cdot \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I_2}=C\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=C\cdot(A\cdot B)^{-1}\Rightarrow \underline{X=C\cdot D^{-1}\ \text{ siendo }\ \mathrm{D}=A\cdot B}$$

- $D=A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 14\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

- Dada $D=\begin{pmatrix}-7 & 14\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ sea $D^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

$$D\cdot D^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-7 & 14\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-7x+14z & -7y+14t\\ -x+4z & -y+4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}-7x+14z&=1\\ -x+4z&=0\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x=-\frac{2}{7}\quad \text{y}\quad z=-\frac{1}{14}$$

$$\left.\begin{aligned}-7y+14t&=0\\ -y+4t&=1\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y=1\quad \text{y}\quad t=\frac{1}{2}$$

Por tanto, $D^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{7} & 1\\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

- Luego, $X=C\cdot D^{-1}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{2}{7} & 1\\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}}$

8. Resuelve la ecuación matricial $A^2 \cdot X = 2B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

- Sea $D = A^2$, entonces la ecuación queda de la forma $D \cdot X = 2B$

- Despejamos X

$$D \cdot X = 2B \Rightarrow \underbrace{D^{-1} \cdot D}_{I_2} \cdot X = D^{-1} \cdot (2B) \Rightarrow X = D^{-1} \cdot (2B)$$

- $2B = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

- $D = A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$

- Dada $D = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$ sea $D^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$D \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x-5z & -y-5t \\ 10x+14z & 10y+14t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -x-5z = 1 \\ 10x+14z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x = \frac{7}{18} \quad \text{y} \quad z = -\frac{5}{18}$$

$$\left.\begin{array}{l} -y-5t = 0 \\ 10y+14t = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y = \frac{5}{36} \quad \text{y} \quad t = -\frac{1}{36}$$

Por tanto, $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{36} \\ -\frac{5}{18} & -\frac{1}{36} \end{pmatrix}$

- Luego

$$X = D^{-1} \cdot (2B) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{36} \\ -\frac{5}{18} & -\frac{1}{36} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{29}{18} & \frac{61}{18} \\ -\frac{5}{9} & \frac{13}{18} & -\frac{41}{18} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{29}{18} & \frac{61}{18} \\ -\frac{5}{9} & \frac{13}{18} & -\frac{41}{18} \end{pmatrix}}$$

9. Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$

a) Realiza, cuando sea posible, los siguientes productos de matrices: $A\cdot B$, $B\cdot C$ y $C\cdot A$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

$B_{2x3}\cdot C_{2x3}$ no se puede efectuar porque el número de columnas de B no coincide con el número de filas de C.

$C_{2x3}\cdot A_{2x2}$ no se puede efectuar porque el número de columnas de B no coincide con el número de filas de C.

b) Resuelve la ecuación matricial $A\cdot X+B=C$

- Despejamos X

$$A\cdot X+B=C\Rightarrow A\cdot X=C-B\Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I_2}\cdot X=A^{-1}\cdot(C-B)\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(C-B)$$

- $C-B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$

- Dada $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2x-z & 2y-t\\ 3x-2z & 3y-2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}2x-z&=1\\ 3x-2z&=0\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x=2 \quad\text{y}\quad z=3$$

$$\left.\begin{aligned}2y-t&=0\\ 3y-2t&=1\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y=-1 \quad\text{y}\quad t=-2$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

- Luego, $X=A^{-1}\cdot(C-B)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -1 & 6\\ -11 & -3 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}-6 & -1 & 6\\ -11 & -3 & 9\end{pmatrix}}$

10. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$:

a) Calcula la matriz *P* que verifica $B\cdot P-A=C^t$

- $B\cdot P-A=C^t\Rightarrow B\cdot P=C^t+A\Rightarrow \underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I_2}\cdot P=B^{-1}\cdot(C^t+A)\Rightarrow P=B^{-1}\cdot(C^t+A)$

- $C^t+A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}$

- Dada $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ sea $B^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

$$B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2x+z & 2y+t\\ 2x+2z & 2y+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}2x+z=1\\ 2x+2z=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}x=1\quad \text{y}\quad z=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}2y+t=0\\ 2y+2t=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}y=-\frac{1}{2}\quad \text{y}\quad t=1$$

Por tanto, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

- Luego, $P=B^{-1}\cdot(C^t+A)=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3 & -\frac{3}{2}\\ -5 & 5 & 1\end{pmatrix}$

b) Determina la dimensión de la matriz *M* para que pueda efectuarse el producto $A\cdot M\cdot C$

Para poder efectuar el producto de dos matrices el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda, por tanto, para poder efectuar el producto $A\cdot M\cdot C$ la matriz M tiene que tener dimensión $3x3$.

$$A_{2x3}\cdot M_{mxn}\cdot C_{3x2}\Rightarrow M_{3x3}$$

c) Determina la dimensión de la matriz *N* para que $C^t\cdot N$ sea una matriz cuadrada.

1º) Como *C* tiene dimensión $3x2\Rightarrow C^t$ tiene dimensión $2x3$.

2º) Para poder efectuar el producto de dos matrices el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda, por tanto, para poder efectuar el producto $C^t \cdot N$ la matriz N tiene que tener dimensión $3xp$ con $p \in N$.

3º) La matriz producto, P, tendrá dimensión $2xp$ con $p \in N$ ($C^t_{2x3} \cdot N_{3xp} = P_{2xp}$ con $p \in N$) y, por tanto, P será cuadrada si $p = 2$.

Por tanto, la matriz N tiene que tener dimensión $3x2$ para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

11. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$:

a) Calcule $(A-I_2)\cdot B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2

$$(A-I_2)\cdot B=\left[\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$$

b) Obtén la matriz B^t y calcula, si es posible, $B^t\cdot A$

$$B^t=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \text{ y } B^t\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

c) Calcula la matriz X que verifica $A\cdot X+B=C$

- Despejamos X

$$A\cdot X+B=C\Rightarrow A\cdot X=C-B\Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I_2}\cdot X=A^{-1}\cdot(C-B)\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(C-B)$$

- $C-B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

- Dada $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-x & -y\\ 2x+2z & 2y+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}-x=1\\ 2x+2z=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x=-1 \quad\text{y}\quad z=1$$

$$\left.\begin{array}{l}-y=0\\ 2y+2t=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y=0 \quad\text{y}\quad t=\frac{1}{2}$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

- Luego, $X=A^{-1}\cdot(C-B)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}}$

12. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, determina una matriz B tal que $A+B=A\cdot B$

Sea $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$A+B=A\cdot B\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1+x & 2+y \\ -1+z & 3+t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ -x+3z & -y+3t \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+x=x+2z \\ -1+z=-x+3z \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} -2z=-1 \\ x-2z=1 \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}x=2 \quad \text{y} \quad z=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2+y=y+2t \\ 3+t=-y+3t \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} -2t=-2 \\ y-2t=-3 \end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}y=-1 \quad \text{y} \quad t=1$$

Luego, $\underline{B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}$

13. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcula una matriz triangular superior *B* tal que $A = B\cdot B^t$. La matriz *B*, ¿es única?

- *B* matriz triangular superior tal que $A = B\cdot B^t \Rightarrow B=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a,b,c\in\Re$

$$A = B\cdot B^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & b\cdot c \\ b\cdot c & c^2 \end{pmatrix} \text{ con } a,b,c\in\Re\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+b^2=13 \\ b\cdot c=-2 \\ c^2=1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{de } E_3]{} c=1 \ \text{ ò } \ c=-1$$

<u>CASO 1 $c=1$</u>

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=13 \\ b=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow a^2+4=13\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=3 \ \text{ ò } \ a=-3$$

$$* \ a=3,\ b=-2,\ c=1\Rightarrow B_1=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$* \ a=-3,\ b=-2,\ c=1\Rightarrow B_2=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>CASO 2 $c=-1$</u>

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=13 \\ b=2 \end{array}\right\}\Rightarrow a^2+4=13\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=3 \ \text{ ò } \ a=-3$$

$$* \ a=3,\ b=2,\ c=-1\Rightarrow B_1=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$* \ a=-3,\ b=2,\ c=-1\Rightarrow B_2=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

14. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}$. Calcula *x*, y, *z*, sabiendo que $A\cdot B=2C-D$

$$A\cdot B=2C-D\Rightarrow\begin{pmatrix}3&1\\1&3\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3x+y\\x+3y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3x+y\\x+3y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-z\\2-z\\-z\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+y=2-z\\x+3y=2-z\\x=-z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+y+z=2\\x+3y+z=2\\x+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+z=0\\x+3y+z=2\\3x+y+z=2\end{array}\right\}$$

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{l}x+z=0\\x+3y+z=2\\3x+y+z=2\end{array}\right\}$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\1&3&1&2\\3&1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[E_3+(-3)E_1]{E_2-E_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&3&0&2\\0&1&-2&2\end{array}\right)\xrightarrow{E_2^*=E_3\quad E_3^*=E_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-2&2\\0&3&0&2\end{array}\right)\xrightarrow{E_3+(-3)E_2}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-2&2\\0&0&6&-4\end{array}\right)$$

Una vez escalonado el sistema queda: $\begin{cases}x+z=0\\y-2z=2\\6z=-4\end{cases}$

- De E_3 tenemos que $z=\frac{-4}{6}\Rightarrow z=-\frac{2}{3}$
- Sustituyendo en E_2 tenemos que $y-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=2\Rightarrow y+\frac{4}{3}=2\Rightarrow y=2-\frac{4}{3}\Rightarrow y=\frac{2}{3}$
- Sustituyendo en E_1 tenemos que $x+\left(-\frac{2}{3}\right)=0\Rightarrow x-\frac{2}{3}=0\Rightarrow x=\frac{2}{3}$

Luego, $\underline{x=\frac{2}{3}}$, $\underline{y=\frac{2}{3}}$, $\underline{z=-\frac{2}{3}}$

15. Calcula las potencias n-ésimas de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula, utilizando la fórmula general, A^5, B^{40} $, C^9$ y D^{25}.

I) $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$$A^1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

……………………………..

Luego, $A^n=\begin{pmatrix} a^n & n\cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Demostraremos la ley de formación por inducción.

- $n=1 \Rightarrow A^1=\begin{pmatrix} a^1 & 1\cdot a^0 \\ 0 & a^1 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

- Supongamos que la ley de formación es válida para “*n*”, es decir $A^n=\begin{pmatrix} a^n & n\cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$, y veamos que entonces también lo es para “*n*+1”

  $$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} a^n & n\cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n+n\cdot a \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)\cdot a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

  Por tanto, $A^n=\begin{pmatrix} a^n & n\cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \quad \forall n\in N$

II) $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$B^1=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$B^4=B^3\cdot B=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

………………………………..

Luego, $B^n=\begin{pmatrix}1&n&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Demostraremos la ley de formación por inducción.

- $n=1\Rightarrow B^1=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
- Supongamos que la ley de formación es válida para “n”, es decir $B^n=\begin{pmatrix}1&n&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, y veamos que entonces también lo es para “n+1”

$$B^{n+1}=B^n\cdot B=\begin{pmatrix}1&n&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n+1&n+1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in N$

III) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$C^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 \\ 2^1 & 2^1 \end{pmatrix}$

$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{pmatrix}$

$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 32 \\ 32 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 2^5 \\ 2^5 & 2^5 \end{pmatrix}$

$C^4 = C^4 \cdot C = \begin{pmatrix} 32 & 32 \\ 32 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 & 128 \\ 128 & 128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^7 & 2^7 \\ 2^7 & 2^7 \end{pmatrix}$

……………………………..

Luego, $C^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \\ 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \end{pmatrix}$

Demostraremos la ley de formación por inducción.

- $n = 1 \Rightarrow C^1 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 \\ 2^1 & 2^1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

- Supongamos que la ley de formación es válida para "*n*", es decir $C^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \\ 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \end{pmatrix}$, y veamos que entonces también lo es para "*n*+1"

$$C^{n+1} = C^n \cdot C = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \\ 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} \cdot 2 + 2 \cdot 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \cdot 2 + 2 \cdot 2^{2n-1} \\ 2^{2n-1} \cdot 2 + 2 \cdot 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \cdot 2 + 2 \cdot 2^{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2n} + 2^{2n} & 2^{2n} + 2^{2n} \\ 2^{2n} + 2^{2n} & 2^{2n} + 2^{2n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{2n} & 2 \cdot 2^{2n} \\ 2 \cdot 2^{2n} & 2 \cdot 2^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2n+1} & 2^{2n+1} \\ 2^{2n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2(n+1)-1} & 2^{2(n+1)-1} \\ 2^{2(n+1)-1} & 2^{2(n+1)-1} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $C^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \\ 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \end{pmatrix} \quad \forall n \in N$

IV) $D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$D^1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D^2=D\cdot D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D^3=D^2\cdot D=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D^4=D^3\cdot D=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

………………………………..

$$D^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Demostraremos la ley de formación por inducción.

- $n=1\Rightarrow D^1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

- Supongamos que la ley de formación es válida para "n", es decir $D^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, y veamos que entonces también lo es para "n+1"

$$D^{n+1}=D^n\cdot D=D^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&n+1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in N$

Utilizando la fórmula general tenemos

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & n \cdot a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \Rightarrow A^5 = \begin{pmatrix} a^5 & 5 \cdot a^4 \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{40} = \begin{pmatrix} 1 & 40 & 40 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \\ 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow C^9 = \begin{pmatrix} 2^{17} & 2^{17} \\ 2^{17} & 2^{17} \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{25} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Calcula los valores de *t*, para que el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & t \end{pmatrix}$

a) sea 1 b) sea 2 c) sea 3

En primer lugar escalonamos la matriz *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3+2E_1]{E_2+(-2)E_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango(A) \leq 2 \quad \forall t \in \Re$$

a) Si $t = -2 \Rightarrow t + 2 = 0 \Rightarrow Rango(A) = 1$

b) Si $t \neq -2 \Rightarrow t + 2 \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = 2$

c) Independientemente del valor del parámetro *t* el rango de la matriz *A* nunca será 3.

17. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_4+(-2)E_1]{E_2+E_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_4+E_1]{E_3-E_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango(A)=3$$

<u>Observaciones</u>

- F_3 es combinación lineal de F_1 y F_2 ($F_3 = F_1 + F_2$), por eso al escalonar la matriz se elimina.
- F_1, F_2 y F_4 son linealmente independientes, por eso el rango de la matriz *A* es 3.
- En cualquier matriz "Nº filas linealmente independientes = Nº de columnas linealmente independientes", por tanto, las tres columnas de *A* también son linealmente independientes.

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2E_2+E_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3+3E_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango(B)=3$$

<u>Observaciones</u>

- Las tres filas de la matriz son linealmente independientes, es decir, ninguna de ellas se puede expresar como combinación lineal de las otras.
- De las cuatro columnas de la matriz, tres son linealmente independientes (en concreto C_1, C_2 y C_3) y la (C_4) otra depende linealmente de ellas, es decir, se puede expresar como combinación lineal de ellas. ($C_4 = 0 \cdot C_1 + 2C_2 + 2C_3$)

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & -7 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4E_3+5E_1]{-4E_2+3E_1} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & 7 & -23 & 18 \\ 0 & -7 & 23 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3+E_2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & 7 & -23 & 18 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \Rightarrow Rango(C)=2$$

<u>Observaciones</u>

- F_3 es combinación lineal de F_1 y F_2 ($F_3 = 2F_1 - F_2$), por eso al escalonar la matriz se elimina.
- F_1 y F_2 son linealmente independientes, por eso el rango de la matriz *C* es 2.

- En cualquier matriz "Nº filas linealmente independientes = Nº de columnas linealmente independientes", por tanto, de las cuatro columnas de la matriz dos son linealmente independientes y las otras dos depende linealmente de ellas, es decir, se puede expresar como combinación lineal de ellas aunque no se vea a simple vista la combinación. En concreto C_1 y C_2 son linealmente independientes y $C_3 = \frac{27}{7}C_1 - \frac{23}{7}C_2$ y $C_4 = -\frac{12}{7}C_1 + \frac{18}{7}C_2$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 2 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3+3E_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3-E_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango(D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{E_2+(-3)E_1 \\ E_3+(-4)E_1}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 14 & -8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 14 & -8 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-14E_3+E_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & -50 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango(E) = 3$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4-E_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4-E_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_4-E_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rango(F) = 4$$

18. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ halla la matriz X tal que $A\cdot X=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$

- Sea $C=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$

Tenemos que resolver la ecuación matricial: $A\cdot X=C$

$$A\cdot X=C\Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I_2}\cdot X=A^{-1}\cdot C\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot C}$$

- Dada $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$ sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2x+3z&2y+3t\\x+2z&y+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}2x+3z=1\\x+2z=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}x=2 \quad \text{y} \quad z=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}2y+3t=0\\y+2t=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}y=-3 \quad \text{y} \quad t=2$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$

- Luego, $X=A^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}}$

19. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ averigua los valores del parámetro *m* para que exista A^{-1}. Calcula A^{-1} para $m=4$.

1º) Valores del parámetro *m* para que exista A^{-1}

- Sabemos que: $\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$
- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2+0+0-(-4m+3+0) = -m^2+4m-3$

  Luego, $|A| \neq 0 \Leftrightarrow -m^2+4m-3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$

- Por tanto, $\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m \in \Re - \{1,3\}$

2º) Calcular A^{-1} para $m=4$.

- $m=4 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

  Como $m=4 \in \Re - \{1,3\}$, por el apartado anterior, sabemos que $\exists\, A^{-1}$.

- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$

  $\left.\begin{array}{l} |A| = -m^2+4m-3 \\ m=4 \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = -3$

  $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -19 & -1 & 4 \\ 12 & 0 & -3 \\ -16 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

  Por tanto, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -19 & -1 & 4 \\ 12 & 0 & -3 \\ -16 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -4 & 0 & 1 \\ \frac{16}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

20. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & m & -6\\ 1 & 1 & -m\end{pmatrix}$ averigua los valores del parámetro *m* para que exista A^{-1}. Calcula A^{-1} para $m=2$.

1º) Valores del parámetro *m* para que exista A^{-1}

- Sabemos que: $\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$
- $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & m & -6\\ 1 & 1 & -m\end{vmatrix}=-m^2+0+0-(-m-6+0)=-m^2+m+6$

  Luego, $|A|\neq 0 \Leftrightarrow -m^2+m+6\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -2\\ m\neq 3\end{cases}$

- Por tanto, $\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow m\in \Re-\{-2,3\}$

2º) Calcular A^{-1} para $m=2$.

- $m=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -6\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$

  Como $m=2\in \Re-\{-2,3\}$, por el apartado anterior, sabemos que $\exists\, A^{-1}$.

- $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

  $$\left.\begin{array}{l}|A|=-m^2+m+6\\ m=2\end{array}\right\}\Rightarrow |A|=4$$

  $$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -6\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -6 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -6 & -1 & 6\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

  Por tanto, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -6 & -1 & 6\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

21. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Halla la matriz X que verifica la igualdad $2X - A\cdot B = A^2$

- $2X - A\cdot B = A^2 \Rightarrow 2X = A^2 + A\cdot B \Rightarrow X = \frac{1}{2}\left[A^2 + A\cdot B\right]$
- $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
- $X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

22. Determina una matriz X que verifique la relación $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 11 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 11 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ y $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  Tenemos que resolver la ecuación: $A \cdot X = I_3$

  $A \cdot X = I_3 \Rightarrow \underline{X = A^{-1}}$

- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$

  $|A| = 1$

  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 11 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 38 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

  Por tanto, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 38 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 38 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

- Luego, $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 38 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

23. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de m para los cuales A es regular.

- A es regular (es decir $\exists\, A^{-1}$) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(m+1)+(m-6)(m+1)-12 = 3m+3+m^2+m-6m-6-12 = m^2-2m-15$

  Luego, $|A| \neq 0 \Leftrightarrow m^2-2m-15 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m \neq -3 \end{cases}$

- Por tanto, $\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m \in \Re - \{-3,5\}$

b) Para $m=4$ resuelve la ecuación matricial $X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Tenemos que resolver la ecuación matricial $X \cdot A = B$ con $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Despejamos X :

$$X \cdot A = B \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$

  $|A| = 15-10-12 = -7$

  $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

  Por tanto, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = -\dfrac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 15 & 5 & -6 \\ 10 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

- Luego, $X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de *m* para los cuales *A* es singular.

- A es singular (es decir $\nexists\, A^{-1}$) $\Leftrightarrow |A|=0$

- $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=6-m^2-1=-m^2+5$

  Luego, $|A|=0 \Leftrightarrow -m^2+5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\sqrt{5} \\ m=\sqrt{5} \end{cases}$

- Por tanto, $\nexists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{5}$

b) Para $m=2$, obtén, si existe, la matriz *X* que cumple $X\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Tenemos que resolver la ecuación matricial $X\cdot A=B$ con $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Despejamos X:

  $X\cdot A=B \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$

- $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

  $|A|=6-4-1=1$

  $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

  Por tanto, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=1\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

- Luego, $X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

25. Calcula la matriz X talque $A\cdot X+B=A$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

- Despejamos X

  $A\cdot X+B=A\Rightarrow A\cdot X=A-B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(A-B)\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(A-B)$

- $A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$

-

- Dada $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$ sea $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}$

  $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$

  $\left.\begin{array}{l}x+2z=1\\z=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}x=1\quad\text{y}\quad z=0$

  $\left.\begin{array}{l}y+2t=0\\t=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}y=-2\quad\text{y}\quad t=1$

  Por tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$

- Luego, $X=A^{-1}\cdot(A-B)=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\underline{X=\begin{pmatrix}3 & -3\\-1 & 2\end{pmatrix}}$

26. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ halla la matriz X tal que $A\cdot X\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Sea $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

  Tenemos que resolver la ecuación $A\cdot X\cdot A=B$

- Despejamos X

$$A\cdot X\cdot A=B\Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I_2}\cdot X\cdot \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I_2}=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}$$

- Dada $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sea $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 2x+3z=1 \\ x+2z=0 \end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x=2 \quad \text{y} \quad z=-1$$

$$\left.\begin{matrix} 2y+3t=0 \\ y+2t=1 \end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y=-3 \quad \text{y} \quad t=2$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Luego

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

27. Halla la matriz X que verifica la siguiente ecuación matricial:

$$3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 12 & 15\\ 12 & 11 & 10\end{pmatrix}$$

- Sean $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 12 & 15\\ 12 & 11 & 10\end{pmatrix}$

  Tenemos que resolver la ecuación $3A+B\cdot X=C$

- Despejamos X

  $3A+B\cdot X=C\Rightarrow B\cdot X=C-3A\Rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot X=B^{-1}\cdot(C-3A)\Rightarrow X=B^{-1}\cdot(C-3A)$

  $$C-3A=\begin{pmatrix}0 & 12 & 15\\ 12 & 11 & 10\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 12 & 15\\ 12 & 11 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 3 & 3\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 12\\ 9 & 11 & 13\end{pmatrix}$$

- Dada $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ sea $B^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

$$B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x+2z & y+2t\\ -x+3z & -y+3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}x+2z=1\\ -x+3z=0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}x=\frac{3}{5}\quad\text{y}\quad z=\frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l}y+2t=0\\ -y+3t=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolver el sistema}}y=-\frac{2}{5}\quad\text{y}\quad t=\frac{1}{5}$$

Por tanto, $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

- Luego, $X=B^{-1}\cdot(C-3A)=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 9 & 12\\ 9 & 11 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}}$

28. Determina aquellos valores de "*y*" para los que la matriz $Z = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación matricial:

$$Z^2 - \frac{5}{2}Z + I = O$$

siendo *I* la matriz identidad de orden 2 y *O* la matriz nula de orden 2.

Expresa Z^{-1} en función de *Z*.

- $Z^2 - \frac{5}{2}Z + I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5y}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Rightarrow \begin{pmatrix} y^2 - \frac{5y}{2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^2 - \frac{5y}{2} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Z^{-1} en función de *Z*

$$Z^2 - \frac{5}{2}Z + I = O \Rightarrow Z^2 - \frac{5}{2}Z + I = \frac{5}{2}Z - Z^2 = I \Rightarrow Z \cdot \left(\frac{5}{2}I - Z\right) = I \Rightarrow \underline{Z^{-1} = \frac{5}{2}I - Z}$$

29. Una empresa fabrica tres tipos de artículos: A, B y C. Los precios de coste de cada unidad son 6 €, 9´20 € y 14´30 € respectivamente. Los correspondientes precios de venta de una unidad de cada artículo son 18 €, 28 € y 40 €. El número de unidades vendidas anualmente es de 2240, 1625 y 842, respectivamente. Sabiendo que las matrices de costes e ingresos, C e I, son diagonales y que la matriz de ventas, V, es una matriz fila:

a) Determina las matrices C, I y V.

MATRIZ DE COSTES POR UNIDAD $\rightarrow C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9'20 & 0 \\ 0 & 0 & 14'30 \end{pmatrix}$

MATRIZ DE INGRESOS POR UNIDAD $\rightarrow I = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$

MATRIZ DE VENTAS $\rightarrow V = \begin{pmatrix} 2240 & 1625 & 842 \end{pmatrix}$

b) Obtén, a partir de las matrices anteriores, la matriz de ingresos anuales correspondientes a los tres artículos, la matriz de gastos anuales y la matriz de beneficios anuales.

<u>MATRIZ DE INGRESOS ANUALES</u>

$$A = V \cdot I = \begin{pmatrix} 2240 & 1625 & 842 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40320 & 45500 & 33680 \end{pmatrix}$$

<u>MATRIZ DE GASTOS ANUALES</u>

$$B = V \cdot C = \begin{pmatrix} 2240 & 1625 & 842 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9'20 & 0 \\ 0 & 0 & 14'30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13440 & 14950 & 12040'60 \end{pmatrix}$$

<u>MATRIZ DE BENEFICIOS ANUALES</u>

$$A - B = \begin{pmatrix} 40320 & 45500 & 33680 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13440 & 14950 & 12040'60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26880 & 30550 & 21639'40 \end{pmatrix}$$

30. Tres escritores presentan a un editor, al acabar una enciclopedia, la minuta siguiente:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 30 €, la conferencia a 75 € y el viaje a 50 €. Si sólo piensa pagar, respectivamente el 75 %, el 80 % y el 60 % de lo que corresponda a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

MATRIZ DE MINUTA POR ESCRITOR

$$D=\begin{pmatrix}40 & 10 & 5\\ 80 & 15 & 8\\ 100 & 25 & 10\end{pmatrix}$$ (“Escritor x horas realizadas en cada actividad”)

MATRIZ DE INGRESOS (SIN REBAJAR) POR CADA HORA DE ACTIVIDAD REALIZADA

$$E=\begin{pmatrix}30\\ 75\\ 50\end{pmatrix}$$ (“Actividad x ingresos por hora en €”)

MATRIZ DE INGRESOS (SIN REBAJAR) POR ESCRITOR

$$I=D\cdot E=\begin{pmatrix}40 & 10 & 5\\ 80 & 15 & 8\\ 100 & 25 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}30\\ 75\\ 50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2200\\ 3925\\ 5375\end{pmatrix}$$ (“Escritor x ingresos totales sin rebajar en €”)

Es decir, el escritor A ingresaría 2200 €, el escritor B ingresaría 3925 € y el escritor C ingresaría 5375 €.

MATRIZ DE LO QUE PAGARÁ FINALMENTE EL EDITOR A CADA ESCRITOR (en tanto por uno)

$$F=\begin{pmatrix}0{,}75 & 0{,}80 & 0{,}60\end{pmatrix}$$

GASTO TOTAL FINAL DEL EDITOR

$$F\cdot I=\begin{pmatrix}0{,}75 & 0{,}80 & 0{,}60\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2200\\ 3925\\ 5375\end{pmatrix}=0{,}75\cdot 2200+0{,}80\cdot 3925+0{,}60\cdot 5375=8565{,}75€$$

31. Tres supermercados *A*, *B* y *C*, se disputan los clientes de una ciudad. Inicialmente cada uno tiene una cuota de mercado igual a la tercera parte de los consumidores. Como consecuencia de una campaña publicitaria, un mes después se constata que:

- *A* conserva el 80 % de sus clientes, gana el 10 % de los de *B* y el 2 % de los de *C*.
- *B* conserva el 70 % de sus clientes, gana el 14 % de los de *A* y el 8 % de los de *C*.
- *C* conserva el 90 % de sus clientes, gana el 6 % de los de *A* y el 20 % de los de *B*.

A partir de estos datos:

a) Escribe, matricialmente, los cambios producidos en los porcentajes.

<u>MATRIZ DE CAMBIOS TRAS LA CAMPAÑA PUBLICITARIA</u> $\rightarrow P = \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}02 \\ 0{,}14 & 0{,}70 & 0{,}08 \\ 0{,}06 & 0{,}20 & 0{,}90 \end{pmatrix}$ (en tanto por uno)

b) Usar la matriz anterior para calcular la cuota de mercado que tiene cada supermercado después de la campaña.

<u>MATRIZ DE CUOTA DE MERCADO INICIAL</u> $\rightarrow I = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33{,}\widehat{3}\% \\ 33{,}\widehat{3}\% \\ 33{,}\widehat{3}\% \end{pmatrix}$

<u>MATRIZ DE CAMBIOS TRAS LA CAMPAÑA PUBLICITARIA</u> $\rightarrow P = \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}02 \\ 0{,}14 & 0{,}70 & 0{,}08 \\ 0{,}06 & 0{,}20 & 0{,}90 \end{pmatrix}$ (en tanto por uno)

<u>MATRIZ DE CUOTA DE MERCADO FINAL</u> $\rightarrow P \cdot I = \begin{pmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}02 \\ 0{,}14 & 0{,}70 & 0{,}08 \\ 0{,}06 & 0{,}20 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{75} \\ \frac{23}{75} \\ \frac{29}{75} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30{,}\widehat{6}\% \\ 30{,}\widehat{6}\% \\ 38{,}\widehat{6}\% \end{pmatrix}$

Es decir, la cuota de mercado de cada uno de los supermercados *A*, *B* y *C* es, respectivamente, del $30{,}\widehat{6}\%$, $30{,}\widehat{6}\%$ y $38{,}\widehat{6}\%$ de los consumidores.

32. De una matriz A se sabe que su segunda fila es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ y su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Halla los restantes elementos de A sabiendo que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Para poder efectuar el producto $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz A tiene que tener dimensión 3x2.
- A tiene dimensión 3x2, su segunda fila es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ y su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \\ y & -3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \\ y & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-1+y & 0 \\ 2x+y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-1+y=0 \\ 2x+y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 2x+y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \end{matrix}\right\}$
- Luego, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

33. Hallar todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ $a,b,c \in \Re$ que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$.

$$X^2 = 2X \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 2a \\ ab+bc = 2b \\ c^2 = 2c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 - 2a = 0 \\ ab+bc = 2b \\ c^2 - 2c = 0 \end{array}\right\}$$

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} a^2 - 2a = 0 \\ ab+bc = 2b \\ c^2 - 2c = 0 \end{array}\right\}$

De la primera ecuación: $a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$

<u>CASO 1 $a = 0$</u>

$$\left.\begin{array}{l} bc = 2b \\ c^2 - 2c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} bc - 2b = 0 \\ c^2 - 2c = 0 \end{array}\right\}$$

De la 2ª ecuación: $c^2 - 2c = 0 \Rightarrow c(c-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \xrightarrow{\text{Sustituyendo en } E_1} -2b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ c = 2 \xrightarrow{\text{Sustituyendo en } E_1} 2b - 2b = 0 \Rightarrow b \in \Re \end{cases}$

Luego,

$a = 0,\ b = 0,\ c = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $a = 0,\ b \in \Re,\ c = 2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$ $b \in \Re$

<u>CASO 2 $a = 2$</u>

$$\left.\begin{array}{l} 2b + bc = 2b \\ c^2 - 2c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} bc = 0 \\ c^2 - 2c = 0 \end{array}\right\}$$

De la 2ª ecuación: $c^2 - 2c = 0 \Rightarrow c(c-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \xrightarrow{\text{Sustituyendo en } E_1} b \cdot 0 = 0 \Rightarrow b \in \Re \\ c = 2 \xrightarrow{\text{Sustituyendo en } E_1} 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

Luego,

$a = 2,\ b \in \Re,\ c = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ $b \in \Re$ $\qquad$ $a = 2,\ b = 0,\ c = 2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

34.

a) Determine los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=3+2x \\ 3x+2y=3y-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=-3 \\ 3x-y=-2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver sistema}}$$

$$x = -\frac{5}{4} \quad \text{e} \quad y = -\frac{7}{4}$$

b) Determina la matriz X de dimensión $2 \text{ x } 2$ tal que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

  Tenemos que resolver la ecuación $X \cdot A - 2B = C$

- Despejamos X

  $$X \cdot A - 2B = C \Rightarrow X \cdot A = C + 2B \Rightarrow X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I_2} = (C+2B) \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = (C+2B) \cdot A^{-1}}$$

- $C + 2B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

- Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

  $$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+3z & y+3t \\ 2x+5z & 2y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $$\left.\begin{matrix} x+3z=1 \\ 2x+5z=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x=-5 \quad \text{y} \quad z=2$$

  $$\left.\begin{matrix} y+3t=0 \\ 2y+5t=1 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y=3 \quad \text{y} \quad t=-1$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

- Luego, $X = (C + 2B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix}}$

35. Determina una matriz A simétrica sabiendo que:

$$|A| = -7 \qquad \text{y} \qquad A\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- A es una matriz simétrica de orden 2 (es de orden 2 para poder realizar el producto que aparece en las condiciones del enunciado) $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \Re$
- $|A| = -7 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow a\cdot c - b^2 = -7$
- $A\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 6a-3b \\ 2b-c & 6b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a-b=-4 \\ 6a-3b=-12 \\ 2b-c=1 \\ 6b-3c=3 \end{array}\right\} \xrightarrow[E_4=3E_3]{E_2=3E_1} \left.\begin{array}{l} 2a-b=-4 \\ 2b-c=1 \end{array}\right\}$$

- Luego, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} a\cdot c-b^2=-7 \\ 2a-b=-4 \\ 2b-c=1 \end{array}\right\}$

Despejando en E_2 y en E_1 tenemos: $a = \dfrac{b-4}{2}$ y $c = 2b-1$.

Sustituyendo en la 1ª ecuación:

$$\frac{(b-4)}{2}\cdot(2b-1) - b^2 = -7 \Rightarrow \frac{(b-4)(2b-1)}{2} - b^2 = -7 \Rightarrow 2b^2 - b - 8b + 4 - 2b^2 = -14 \Rightarrow -9b = -18 \Rightarrow \underline{b=2}$$

Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{b-4}{2} \\ b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} c = 2b-1 \\ b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{c=3}$$

Por tanto $\underline{A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$

36. Determina la matriz X que verifica la ecuación $A\cdot X = X - B$ siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Despejamos X

$$A\cdot X = X - B \Rightarrow A\cdot X - X = -B \Rightarrow (A-I_3)\cdot X = -B \xrightarrow{C=A-I_3} C\cdot X = -B \Rightarrow C^{-1}\cdot C\cdot X = C^{-1}\cdot(-B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{X = C^{-1}\cdot(-B) \text{ siendo } C = A - I_3}$$

- $C = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

♦ $C^{-1} = \dfrac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)$

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $C^{-1} = \dfrac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t) = -\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

♦ Otra forma de calcular C^{-1} es mediante el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3^*=F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1^*=2F_1+F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3:(-2)]{F_1:(-2) \; F_2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Luego,

$$X = C^{-1}\cdot(-B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}}$$

37. Determinar las matrices X que verifican la ecuación $B \cdot X - A = 2X$ siendo $A = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Despejamos X:

$$B \cdot X - A = 2X \Rightarrow B \cdot X - 2X = A \Rightarrow (B - 2I_2) \cdot X = A \xrightarrow{C = B - 2I_2} C \cdot X = A \Rightarrow C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{X = C^{-1} \cdot A \quad \text{siendo} \quad C = B - 2I_2}$$

- $C = B - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Dada $C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea $C^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4x + z & -4y + t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -4x + z = 1 \\ z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} x = -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad z = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -4y + t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Resolver el sistema}} y = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad t = 1$$

Por tanto, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Luego,

$$X = C^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

38. Resuelve la siguiente ecuación matricial $A\cdot X-2B=C$ siendo $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$.

- Despejamos X :

$$A\cdot X-2B=C\Rightarrow A\cdot X=2B+C\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(2B+C)\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot(2B+C)}$$

- $2B+C=\begin{pmatrix}2\\-4\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\\9\end{pmatrix}$

- $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

- $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$|A|=\begin{vmatrix}0&-1&2\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-1+2=1$$

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$

- Luego,

$$X=A^{-1}\cdot(2B+C)=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-1\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18\\27\\17\end{pmatrix}$$

39.

a) Resuelve la ecuación matricial $A\cdot X + A^t = B\cdot X$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

$$A\cdot X + A^t = B\cdot X \Rightarrow A^t = B\cdot X - A\cdot X \Rightarrow A^t = (B-A)\cdot X \xrightarrow{C=B-A} A^t = C\cdot X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C^{-1}\cdot A^t = C^{-1}\cdot C\cdot X \Rightarrow C^{-1}\cdot A^t = X \Rightarrow \underline{X = C^{-1}\cdot A^t \quad \text{siendo} \quad C = B-A}$$

b) Halla la matriz X sabiendo que $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- $C = B-A=\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $C=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)$

$$|C|=\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(C^t)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)=\dfrac{1}{-1/2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Luego,

$$X = C^{-1}\cdot A^t=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

40. Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $a,b,c,d\in\Re$ y suponemos que la matriz A cumple las propiedades $A\cdot A=I$ y $|A|=1$, siendo *I* la matriz identidad. Calcular los coeficientes de la matriz *A*.

- $A\cdot A=I\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases}$
- $|A|=1\Rightarrow ad-bc=1$
- Tenemos que resolver el sistema: $\begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \\ ad-bc=1 \end{cases}\xrightarrow{E_1\to E_1+E_5}\begin{cases} a^2+ad=2 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \\ ad-bc=1 \end{cases}\longrightarrow\begin{cases} a(a+d)=2 \\ b(a+d)=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \\ ad-bc=1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{De E}_1\to a(a+d)=2\neq 0\Rightarrow a\neq 0 \;\text{ y }\; a+d\neq 0 \\ \text{De E}_2\to b(a+d)=0\Rightarrow b=0 \;\text{ ò }\; a+d=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \underline{b=0} \text{ y el sistema queda de la forma: }\begin{cases} a(a+d)=2 \\ ac+cd=0 \\ d^2=1 \\ ad=1 \end{cases}$$

De $\text{E}_4\longrightarrow d=1$ ò $d=-1$

<u>CASO I $\to d=1$</u>

$$\begin{cases} a(a+1)=2 \\ ac+c=0 \\ \underline{a=1} \end{cases}\longrightarrow c+c=0\longrightarrow 2c=0\longrightarrow \underline{c=0}$$

Luego, $a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=1\Rightarrow \underline{A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

<u>CASO II $\to d=-1$</u>

$$\begin{cases} a(a-1)=2 \\ ac-c=0 \\ \underline{a=-1} \end{cases}\longrightarrow -c-c=0\longrightarrow -2c=0\longrightarrow \underline{c=0}$$

Luego, $a=-1,\ b=0,\ c=0,\ d=-1\Rightarrow \underline{A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

41. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Hallar A^{-1}.

- $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Hallar la matriz *X*, tal que: $A\cdot X\cdot A^t=B$

- Despejamos la matriz X :

$$A\cdot X\cdot A^t=B\Rightarrow A^{-1}A\cdot X\cdot A^t(A^t)^{-1}=A^{-1}\cdot B\cdot(A^t)^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot(A^t)^{-1}\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot B\cdot(A^{-1})^t}$$

- Luego,

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot(A^{-1})^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}}$$

42. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de x la matriz A tiene inversa?

$\exists\ A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}=-4x-2-x^2=-x^2-4x-2$$

$$|A|\neq 0 \Leftrightarrow -x^2-4x-2\neq 0 \Leftrightarrow x^2+4x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2} \Leftrightarrow x\neq\frac{-4\pm\sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x\neq\frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x\neq -2\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x\neq -2+\sqrt{2} \ \text{ y } \ x\neq -2-\sqrt{2}$$

Por tanto, $\underline{\exists\ A^{-1} \Leftrightarrow x\neq -2+\sqrt{2} \ \text{ y } \ x\neq -2-\sqrt{2}}$

b) Calcular la inversa de A para $x=-1$.

$$x=-1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$\left.\begin{array}{l} |A|=-x^2-4x-2 \\ x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow |A|=-1+4-2=1$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

c) ¿Qué dimensión debe tener una matriz B para que la ecuación matricial $A\cdot B=C\cdot D$ tenga sentido? Calcula B para $x=-1$.

- $A_{3x3} \cdot B_{mxn} = C_{3x2} \cdot D_{2x2} \Rightarrow m = 3 \quad \text{y} \quad n = 2$, es decir, B debe tener dimensión $3x2$.

- $A \cdot B = C \cdot D \xrightarrow{D=I_2} A \cdot B = C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot C \Rightarrow \underline{B = A^{-1} \cdot C}$

- $B = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

43. Resuelve la ecuación matricial $B\cdot(2A+I)=A\cdot X\cdot A+B$, siendo $A=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

- $B\cdot(2A+I)=A\cdot X\cdot A+B\Rightarrow B\cdot(2A+I)-B=A\cdot X\cdot A\Rightarrow B\cdot(2A)+B-B=A\cdot X\cdot A\Rightarrow 2BA=A\cdot X\cdot A\Rightarrow$
$\Rightarrow 2BA\cdot A^{-1}=A\cdot X\cdot A\cdot A^{-1}\Rightarrow 2B=A\cdot X\Rightarrow A^{-1}\cdot(2B)=A^{-1}\cdot A\cdot X\Rightarrow 2A^{-1}B=X\Rightarrow \underline{X=2A^{-1}B}$

  - $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\-2&0&1\end{vmatrix}=3-4-2-8=-11$$

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\-2&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}3&-4&-2\\-2&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix}1&2&3\\6&1&7\\2&4&-5\end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=\dfrac{1}{-11}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\6&1&7\\2&4&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{11}&-\frac{2}{11}&-\frac{3}{11}\\-\frac{6}{11}&-\frac{1}{11}&-\frac{7}{11}\\-\frac{2}{11}&-\frac{4}{11}&\frac{5}{11}\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{11}&-\frac{2}{11}&-\frac{3}{11}\\-\frac{6}{11}&-\frac{1}{11}&-\frac{7}{11}\\-\frac{2}{11}&-\frac{4}{11}&\frac{5}{11}\end{pmatrix}}$

- $X=2A^{-1}B=2\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{11}&-\frac{2}{11}&-\frac{3}{11}\\-\frac{6}{11}&-\frac{1}{11}&-\frac{7}{11}\\-\frac{2}{11}&-\frac{4}{11}&\frac{5}{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{11}&-\frac{4}{11}&-\frac{6}{11}\\-\frac{12}{11}&-\frac{2}{11}&-\frac{14}{11}\\-\frac{4}{11}&-\frac{8}{11}&\frac{10}{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}\frac{2}{11}&\frac{8}{11}&-\frac{6}{11}\\-\frac{10}{11}&\frac{26}{11}&-\frac{36}{11}\\\frac{4}{11}&-\frac{6}{11}&\frac{10}{11}\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}\frac{2}{11}&\frac{8}{11}&-\frac{6}{11}\\-\frac{10}{11}&\frac{26}{11}&-\frac{36}{11}\\\frac{4}{11}&-\frac{6}{11}&\frac{10}{11}\end{pmatrix}}$

44. Sea $A=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2.

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix}$$

b) Calcula todos los valores de *x* e *y* para los que se verifica $A^2=\begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A^2=\begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-1=x+1 \\ -x-y=-2 \\ x+y=2 \\ y^2-1=-1 \end{cases}\xrightarrow{E_2=-E_3}\begin{cases} x^2-x-2=0 \\ x+y=2 \\ y^2=0 \end{cases}$$

- De $E_3 \to \underline{y=0}$
- Sustituyendo en $E_2 \to x+0=2 \to \underline{x=2}$
- Comprobamos que $\underline{x=2}$ verifica $E_1 \to (2)^2-2-2=4-2-2=0$

Por tanto, $\underline{x=2}$ e $\underline{y=0}$

45. Hallar la matriz X que cumple $AXA = 2BA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

- Despejamos X :

$$AXA = 2BA \Rightarrow AXAA^{-1} = 2BAA^{-1} \Rightarrow AX = 2B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2B) \Rightarrow \underline{X = A^{-1}(2B)}$$

- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

- $X = A^{-1}(2B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$

46. Para cada "a" se considera la matriz $A(a)$ dada por $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Encontrar el rango de la matriz $A^2(a)-A^t(a)$ en función del valor de a.

- Sea $B(a)=A^2(a)-A^t(a)$

$$B(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2a & a^2+2\\ 0 & 1 & 2a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2a & a^2+2\\ -a & 0 & 2a\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix}$$

- ¿ $Rango(B(a))$?

  - $$|B(a)|=\begin{vmatrix}0 & 2a & a^2+2\\ -a & 0 & 2a\\ -1 & -a & 0\end{vmatrix}=-4a^2+a^2(a^2+2)=-4a^2+a^4+2a^2=a^4-2a^2$$

    $$|B(a)|=0 \Leftrightarrow a^4-2a^2=0 \Leftrightarrow a^2(a^2-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=0 \rightarrow a=0 \\ a^2-2=0 \rightarrow a=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

  - DISCUSIÓN
    - Si $a\in\Re-\{0,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}\Rightarrow |B(a)|\neq 0 \Rightarrow Rango(B(a))=3$
    - Si $a=0\Rightarrow B(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow Rango(B(a))=2$
    - Si $a=\sqrt{2}\Rightarrow B(a)=\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{2} & 4\\ -\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2}\\ -1 & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$

      $$\left.\begin{array}{l}\begin{vmatrix}0 & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow Rango(B(a)\geq 2 \\ |B(a)|=0\end{array}\right\}\Rightarrow Rango(B(a))=2$$

- Si $a=-\sqrt{2} \Rightarrow B(a)=\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 4 \\ \sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow Rango(B(a) \geq 2 \\ |B(a)| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango(B(a)) = 2$$

Por tanto,

Si $a \in \Re - \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \Rightarrow Rango(B(a)) = 3$

Si $a = 0, a = \sqrt{2}$ ò $a = -\sqrt{2} \Rightarrow Rango(B(a)) = 2$

47. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0&1\\-3&1\\2&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&-4\end{pmatrix}$:

a) Calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\-3&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-4\\-3&-8&-10\\2&7&0\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\-3&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6\\-11&-3\end{pmatrix}$$

b) Discutir si existe solución del sistema $A\cdot B\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&-4\\-3&-8&-10\\2&7&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}y-4z=2\\-3x-8y-10z=5\\2x+7y=0\end{array}\right\}$$

<u>DISCUSIÓN</u>

$$\begin{array}{ccc}x&y&z\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-4&2\\-3&-8&-10&5\\2&7&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{Ordenamos las columnas de la matriz}}\begin{array}{ccc}y&x&z\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-4&2\\-8&-3&-10&5\\7&2&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[E_3+(-7)E_1]{E_2+(8)E_1}$$

$$\longrightarrow\begin{array}{ccc}y&x&z\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-4&2\\0&-3&-42&21\\0&2&28&-14\end{array}\right)\xrightarrow{3E_3+(2)E_2}\begin{array}{ccc}y&x&z\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-4&2\\0&-3&-42&21\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>$Rango(A)=Rango(A^*)=2<$ nº de incógnitas $\Rightarrow S.C.I.$</u>

En caso afirmativo, resolverlo utilizando el método de Gauss.

<u>RESOLUCIÓN</u>

$$\left.\begin{array}{r}y-4z=2\\-3x-42z=21\end{array}\right\}\xrightarrow{E_3:(-3)}\left.\begin{array}{r}y-4z=2\\x+14z=-7\end{array}\right\}\xrightarrow{z=\lambda}\left.\begin{array}{r}y=2+4\lambda\\x=-7-14\lambda\end{array}\right\}$$

Por tanto, es un S.C.I. con solución $(-7-14\lambda,2+4\lambda,\lambda)\quad\lambda\in\Re$

48. Sabiendo que $2A-B=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}$ y $3A+2B=\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}$

a) ¿Cuáles son las dimensiones de A y B?

Las matrices A y B tienen dimensión $2x3$

b) Calcula las matrices A y B.

Sean $C=\begin{pmatrix}5 & 12 & 7\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}$

- $\left.\begin{array}{l}2A-B=C\\ 3A+2B=D\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1\to 2E_1}\left.\begin{array}{l}4A-2B=2C\\ 3A+2B=D\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1+E_2}7A=2C+D\Rightarrow A=\frac{1}{7}(2C+D)$

- $\left.\begin{array}{l}2A-B=C\\ 3A+2B=D\end{array}\right\}\xrightarrow[E_2\to 2E_2]{E_1\to -3E_2}\left.\begin{array}{r}-6A+3B=-3C\\ 6A+4B=2D\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1+E_2}7B=2D-3C\Rightarrow B=\frac{1}{7}(2D-3C)$

Luego,

$$A=\frac{1}{7}(2C+D)=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix}10 & 24 & 14\\ 8 & 4 & 14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11 & 25 & 0\\ 20 & 10 & 35\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}21 & 49 & 14\\ 28 & 14 & 49\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 2\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}}$$

$$B=\frac{1}{7}(2D-3C)=\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix}22 & 50 & 0\\ 40 & 20 & 70\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15 & 36 & 21\\ 12 & 6 & 21\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 14 & -21\\ 28 & 14 & 49\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}}$$

49. Halla la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

- $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=4-2-1=1$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}}$

50. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ calcula la matriz X que verifica $A\cdot X\cdot B=2C$.

- Despejamos X:

$$A\cdot X\cdot B=2C \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot 2C\cdot B^{-1}\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot(2C)\cdot B^{-1}}$$

- $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$|A|=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4$$

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -4\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}}$$

- $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot Adj(B^t)$

$$|B|=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4$$

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(B^t)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot Adj(B^t)=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}}$$

- $$X=A^{-1}\cdot(2C)\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ 2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

51. Determinar el valor real de "*x*" para el que se cumple la siguiente propiedad:

El determinante de la matriz $2B$ es 160, siendo $B=\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|2B| \underset{(*)}{=} 8\cdot|B| = 8\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-F_1}}{=} = 8\cdot\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 1-x & -2 & 0 \\ 0 & -x^2-1 & 0 \end{vmatrix} = 8\cdot\begin{vmatrix} -(x-1) & -2 \\ 0 & -(x^2+1) \end{vmatrix} = 8(x-1)(x^2+1)$$

(*) $\quad |k\cdot A| = k^n\cdot|A|$ con A matriz cuadrada de orden n y $k\in\Re$

$$|2B| = 160 \Leftrightarrow 8(x-1)(x^2+1) = 160 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) = 20 \Leftrightarrow x^3-x^2+x-1 = 20 \Leftrightarrow x^3-x^2+x-21 = 0 \underset{(Ruffini)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+2x+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \to \underline{x=3} \\ x^2+2x+7=0 \to \nexists \text{ solución real} \end{cases}$$

52. Determinar la matriz X que verifica $BX - A = 2X$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Justifica la respuesta.

- $BX - A = 2X \Rightarrow BX - 2X = A \Rightarrow (B-2I)X = A \Rightarrow CX = A$ con $C = (B-2I) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \underline{X = C^{-1} \cdot A \text{ con } C = (B-2I)}$

- $C = B - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $C^{-1} = \dfrac{1}{|C|} \cdot Adj(C^t)$

  $|C| = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$

  $C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

  $C^{-1} = \dfrac{1}{|C|} \cdot Adj(C^t) = \dfrac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

- $X = C^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$

53. Determina todas las matrices X tales que $A\cdot X = X\cdot A$, donde $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Buscamos todas las matrices $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ que conmutan con A

$$A\cdot X = X\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ a+c & b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & a+b\\ c+d & c+d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+c=a+b\\ b+d=a+b\\ a+c=c+d\\ b+d=c+d\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-c=0\\ a-d=0\\ a-d=0\\ b-c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-c=0\\ a-d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=b\\ d=a\end{cases}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\ \text{ con }\ a,b\in\Re}$$

54. Hallar una matriz con tres filas y tres columnas que tenga tres elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden 2 sea nulo.

Por ejemplo la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

55. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$ donde *a* es distinto de cero.

a) Calcula A^2.

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$$

b) Calcula A^{-1}.

- $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

- $|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{vmatrix}=-a^3+2a^3=a^3$

Luego $\exists\ A^{-1}\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow a^3\neq 0\Leftrightarrow a\neq 0$

- $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \\ 2a & 0 & -a \end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -2a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$

Por tanto, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=\dfrac{1}{a^3}\cdot\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & -2a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}}$

c) Calcula, razonadamente, A^{20}

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}=a^2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^3 & 0 & -2a^3 \\ 0 & a^3 & 0 \\ a^3 & 0 & a^3 \end{pmatrix} = a^3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix} = a^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a^4 I_3$$

Entonces,

$$A^{20} = A^{4\cdot 5} = (A^4)^5 = (a^4 I_3)^5 = a^{20} I_3 = \begin{pmatrix} a^{20} & 0 & 0 \\ 0 & a^{20} & 0 \\ 0 & 0 & a^{20} \end{pmatrix}$$

d) Calcula, razonadamente, $Det(A^{19})$.

$$A^{19} = A^{4\cdot 4+3} = (A^4)^4 \cdot A^3 = (a^4 I_3)^4 \cdot A^3 = a^{16} I_3 \cdot A^3 = a^{16} A^3 = a^{16} \cdot a^3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a^{19} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|A^{19}\right| \underset{(*)}{=} (a^{19})^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^{57} \cdot (-1+2) = a^{57}$$

(*) $\left|k \cdot A\right| = k^n \cdot \left|A\right|$ con A matriz cuadrada de orden n y $k \in \Re$

56. Determinar todas las matrices A que conmutan con $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, es decir, verifican $A\cdot B=B\cdot A$.

De estas matrices determina las que tienen la suma de todos sus elementos igual a 0.

Sea $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=B\cdot A\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+b & a\\ c+d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ a & b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=a+c\\ a=b+d\\ c+d=a\\ c=b\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-c=0\\ a-b-d=0\\ -a+c+d=0\\ b-c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-c=0\\ a-b-d=0\\ -a+c+d=0\end{cases}$$

De E_1 tenemos $\underline{b=c}$

Sustituyendo en el sistema: $\begin{cases}a-c-d=0\\ -a+c+d=0\end{cases}\Rightarrow\underline{a=c+d}$

Por tanto, $\underline{A=\begin{pmatrix}c+d & c\\ c & d\end{pmatrix}\quad\text{con}\quad c,d\in\Re}$

57.

a) Discutir para qué valores de *m* tiene inversa la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & m & 0\\ m & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & m & 0\\ m & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1-2m-m^2=-m^2-2m-1=-(m+1)^2$$

$$|A|=0 \Leftrightarrow -m^2-2m-1=0 \Leftrightarrow -(m+1)^2=0 \Leftrightarrow m=-1$$

Por tanto, $\underline{\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m \in \Re-\{-1\}}$

b) Calcular la inversa para ese valor de *m*.

- $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$
- $|A|=\begin{vmatrix}1 & m & 0\\ m & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1-2m-m^2=-m^2-2m-1=-(m+1)^2$
- $A=\begin{pmatrix}1 & m & 0\\ m & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & m & 1\\ m & -1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-1 & -m & -2m\\ -m-2 & 1 & 2\\ 1 & m & -1-m^2\end{pmatrix}$

Por tanto,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)=\frac{1}{-(m+1)^2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -m & -2m\\ -m-2 & 1 & 2\\ 1 & m & -1-m^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{(m+1)^2} & \frac{m}{(m+1)^2} & \frac{2m}{(m+1)^2}\\ \frac{m+2}{(m+1)^2} & -\frac{1}{(m+1)^2} & -\frac{2}{(m+1)^2}\\ -\frac{1}{(m+1)^2} & -\frac{m}{(m+1)^2} & \frac{1+m^2}{(m+1)^2}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{(m+1)^2} & \frac{m}{(m+1)^2} & \frac{2m}{(m+1)^2}\\ \frac{m+2}{(m+1)^2} & -\frac{1}{(m+1)^2} & -\frac{2}{(m+1)^2}\\ -\frac{1}{(m+1)^2} & -\frac{m}{(m+1)^2} & \frac{1+m^2}{(m+1)^2}\end{pmatrix}}$$